

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Ingegneria Civile Edile
ed Ambientale

Tesi di laurea specialistica in Ingegneria Civile
**COMPORTAMENTO POST-CRITICO DI
STRUTTURE RETICOLARI SALDATE**

Luca Pasquale

Relatore:

Prof. Ing. Carlo Pellegrino

Anno Accademico 2011-2012

Sommario

1	INSTABILITA' EULERIANA	5
1.1	Crisi per perdita di rigidezza	5
1.2	Stazionarietà e minimo dell'energia potenziale.....	10
1.3	Teoria del secondo ordine	13
1.4	Problemi euleriani di instabilità	15
1.4.1	Definizione del problema	15
1.4.2	Il carico critico euleriano	16
1.4.3	Considerazioni preliminari	16
1.4.4	Influenza della deformabilità assiale.....	20
1.5	Instabilità flessionale di aste compresse.....	23
1.5.1	E.P.T. di travi caricate assialmente	23
1.5.2	Il carico critico di aste compresse.....	28
1.5.3	Aste uniformemente compresse di sezione costante	28
2	Il collasso per instabilità	34
2.1	Influenza del comportamento post-critico	34
2.1.1	I comportamenti fondamentali	34
2.1.2	Valutazione del comportamento post-critico iniziale.....	38
2.1.3	Valutazione della capacità portante di strutture reali	40
2.2	Aste compresse	41
2.2.1	Curva di stabilità teorica	41
3	Quadro normativo	43
3.1	Costruzioni civili ed industriali	43
3.1.1	Costruzioni di acciaio	43
3.2	Verifiche.....	47
3.2.1	Stabilità delle membrature.....	47
4	STRUTTURE RETICOLARI	50
4.1	Geometria.....	51
4.2	Metodo dei nodi	53
4.3	Metodo delle sezioni o metodo di Ritter.....	54
5	Metodi di convergenza della soluzione	55
5.1	Percorsi di equilibrio e punti critici.....	55
5.2	L'approccio path-following per la determinazione dei percorsi di equilibrio ..	58
5.2.1	Introduzione.....	58
5.2.2	Metodo di Eulero	59

	2
5.2.3 Metodi incrementali-iterativi.....	60
5.3 Il metodo dell'arco di curva (Riks).....	63
5.3.1 Varianti del metodo dell'arco di curva.....	65
6 Evidenze numeriche	69
6.1 Struttura modellata con beam.....	69
6.2 Benchmark di riferimento.....	70
6.3 Modellazione mista plate-beam.....	72
6.3.1 Analisi con f_y decrescente	75

*A tutti quelli che mi ritengono speciale
semplicemente per quello che sono*

Introduzione

La corretta valutazione capacità portante delle strutture è il primo requisito che occorre soddisfatto nelle analisi strutturali. Solo attraverso una corretta comprensione e modellazione del comportamento strutturale è possibile soddisfare questo requisito, che in generale non è facilmente perseguibile. La scelta del modello meccanico con cui vengono effettuate è quindi di fondamentale importanza. Assunzioni non coerenti o semplificate possono indurre a valutazioni errate della capacità portante della struttura. La letteratura fornisce numero davvero elevato di modelli meccanici. L'uso di modelli molto generali in tutti i contesti è impensabile, occorre effettuare delle scelte ponderate che pur trascurando effetti di dettaglio della fenomenologia complessiva, permettono di descrivere qualitativamente e quantitativamente bene il comportamento strutturale.

I livelli di sicurezza minimi che deve soddisfare una struttura sono generalmente fissati all'interno di quadri normativi di riferimento. Spesso però, la normativa non è prestazionale ma prescrittiva. Stabilisce anche le modalità operative, di analisi e di verifiche oltre alle specifiche di carattere tecnico. Questo però presenta degli inconvenienti. Il primo riguarda il soddisfacimento delle prescrizioni, che generalmente è inteso come requisito sufficiente per garantire i minimi livelli di sicurezza. Purtroppo però le prescrizioni sono generalmente basate sull'uso di modelli semplici e formule approssimate che non possono assolutamente garantire una corretta valutazione della capacità portante delle strutture in tutti i contesti strutturali.

Dall'altro la normativa pur non vietando in generale l'uso di modelli complessi, in realtà è ancora distante da un loro corretto recepimento per garantire analisi affidabili quando questi modelli vengono utilizzati. Da un lato quindi la meccanica delle strutture ha sviluppato una serie di modelli e strumenti matematici, implementati in svariati programmi di calcolo. D'altro lato la normativa utilizza in molti casi analisi semplificate basate su considerazioni teoriche e sperimentali. Scopo del presente studio è quello di verificare l'affidabilità delle modalità operative proposte dalla normativa nell'analisi di strutture snelle, per confronto con modelli meccanici più raffinati. Il settore di indagine è stato ristretto ad applicazioni dell'ingegneria civile ed in particolare alle costruzioni in acciaio, costituite da assemblaggi di travi. L'impiego dell'acciaio, infatti, per le notevoli caratteristiche di resistenza e di deformabilità, conduce alla progettazione in molti casi di strutture classificabili come snelle. Il quadro normativo oggetto dello studio è quello fornito dalle Norme Tecniche per le Costruzioni.

Le modalità di analisi previste dalle Norme Tecniche per le Costruzioni sono per le tipologie strutturali analizzate semplificate. Una volta determinate le sollecitazioni attraverso un'analisi del primo ordine si passa alla verifica delle singole sezioni utilizzando in molti casi formule teoriche corrette con coefficienti ottenuti da indagini sperimentali. La normativa prevede comunque vari livelli di approfondimento per la valutazione delle sollecitazioni. Si passa da incrementi empirici delle sollecitazioni ottenute attraverso un'analisi elastica, ad analisi con non linearità geometriche e del materiale. A parte la modalità con cui vengono valutate le sollecitazioni sulla struttura, occorre sempre verificare che le sollecitazioni non superino la resistenza delle membrature. Nel seguito una volta presentata la teoria alla base dell'analisi delle strutture snelle e precisate le modalità operative proposte dalla normativa, si passerà all'analisi di strutture reali attraverso l'uso di due codici commerciali, STRAUS e ABAQUS. Ci si focalizzerà sull'influenza che i giunti saldati hanno nel calcolo della capacità portante della struttura.

1 INSTABILITA' EULERIANA

1.1 Crisi per perdita di rigidità

Il collasso plastico è un evento critico legato all'esaurimento della resistenza del materiale. Questo presenta un limite al livello di sforzo sopportabile e quando tale limite viene raggiunto in zone sufficientemente estese da non consentire l'ulteriore sfruttamento delle possibilità di redistribuzione concesse dalla duttilità, la capacità portante della struttura risulta esaurita.

La crisi può anche sopravvenire per rottura fragile in un elemento strutturale fondamentale, dove le sollecitazioni hanno ecceduto il limite di resistenza o si sono ripetute un numero di volte sufficiente a indurre fenomeni di fatica. Vi sono tuttavia situazioni in cui la crisi della struttura si verifica anche se il livello di sforzo previsto da un normale calcolo si mantiene ovunque al di sotto della capacità di resistenza del materiale.

Il limite di snervamento uniassiale di un acciaio, ad esempio, è praticamente uguale a trazione e compressione: peraltro, mentre un elemento teso sopporta senza inconvenienti una forza pari quasi ad $A\sigma_0$, una membratura compressa può in flettersi e collassare sotto carichi anche sensibilmente inferiori, tanto più piccoli quanto più la lunghezza è elevata nei confronti delle dimensioni della sezione.

Il fenomeno non è dovuto alle sollecitazioni presenti nella membratura compressa, bensì al fatto che piccole deviazioni da questa situazione ne alterano radicalmente la risposta: avvicinando un determinato valore del carico si verificano inflessioni notevoli, che inducono picchi di sforzo ben più elevati di quanto previsto dal calcolo.

È questo un esempio dell'ampia e diversificata categoria di fenomeni complessivamente classificati come di instabilità, che intervengono in moltissimi settori della fisica applicata. Un loro inquadramento globale può essere ottenuto all'interno della teoria generale della stabilità del moto, che ha avuto inizio dagli studi compiuti da Liapunov alla fine dell'Ottocento e affronta il problema dal punto di vista dinamico.

All'interno di questo schema trovano tuttavia posto fenomeni di natura diversa ed è opportuno e ingegneristicamente più illuminante considerare separatamente alcuni di essi, che presentano caratteristiche specifiche.

Essi sono noti come problemi Euleriani di instabilità e possono essere compresi e affrontati anche in ambito statico. L'asta è compressa da una forza P ; è allora evidente che, quale che sia il valore di P , una configurazione di equilibrio è quella banale $\vartheta = 0$. Si vuole vedere se esistano anche configurazioni di equilibrio non banali, che comportino un'inflessione $\vartheta \neq 0$. Il quesito non può trovare risposta nell'ambito dell'ipotesi di piccoli spostamenti che, unitamente alla natura linearmente elastica della molla, prevedrebbe un'unica soluzione, nella fattispecie quella banale. È necessario rimuovere l'ipotesi, imponendo l'equilibrio nella configurazione deformata (Figura 1-1b). L'equilibrio alla rotazione attorno alla cerniera stabilisce adesso

$$PL \sin \vartheta = K\vartheta \quad 1.1$$

La (1.1) ammette la soluzione banale $\vartheta = 0$, ma non solo questa. Le altre soluzioni possono essere calcolate ponendo, come legittimo se $\sin \vartheta \neq 0$

$$\frac{PL}{K} = \frac{\vartheta}{\sin \vartheta} \quad 1.2$$

relazione che associa a ogni q il valore del carico che ne consegue. Si ottiene il grafico in Figura 1-2, dove la linea piena di maggior spessore illustra le configurazioni di equilibrio, banale e non, della struttura (la figura è relativa a $|\vartheta| \leq 2$ radianti: un diagramma completo evidenzierebbe asintoti verticali per $\vartheta = n\pi$ e soluzioni tra tutti gli asintoti, che tuttavia rivestono solo interesse accademico).

Essendo, come ben noto

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \sin \vartheta = \vartheta$$

le soluzioni non banali dipartono dall'asse delle ordinate per $P = K/L$. È questo un punto di biforcazione nei percorsi di equilibrio, raggiunto il quale la struttura può teoricamente scegliere tra tre alternative. Il risultato è tuttavia relativo allo schema con cui la struttura è stata idealizzata.

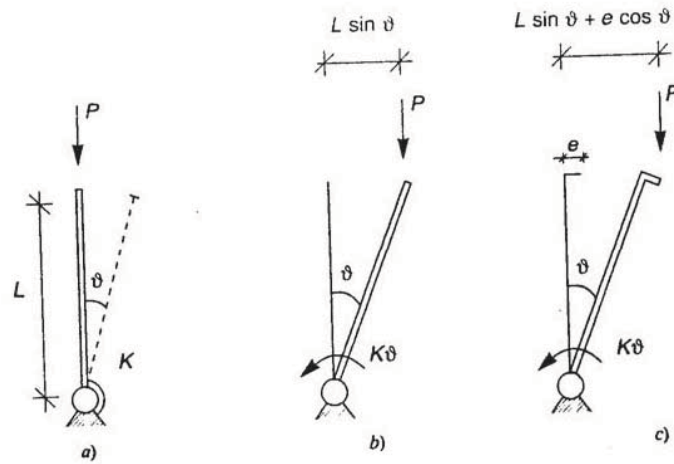


Figura 1-1

Si è in particolare supposto che l'asta fosse perfettamente rettilinea, che la molla fosse a riposo in posizione esattamente verticale e che il carico fosse perfettamente verticale e centrato. Una struttura reale presenta inevitabilmente delle imperfezioni. Queste vengono di regola ignorate, assumendo tacitamente che lo scostamento tra la risposta reale e quella della struttura perfetta sia modesto, dell'ordine delle imperfezioni stesse. Quando tuttavia la risposta della struttura perfetta presenta delle alternative occorre domandarsi quale percorso venga effettivamente seguito in situazioni reali. Si supponga che il carico, pur mantenendosi sempre verticale, presenti una piccola eccentricità $e = \eta/L$. La struttura si infletterà allora fin dall'inizio, sia pure in misura modesta. Ripetendo il calcolo precedente con riferimento a questa situazione (Figura 1-1c) si ottiene, in luogo delle (1.1 e 1.2):

$$PL(\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta) = K\vartheta \rightarrow \frac{PL}{K} = \frac{\vartheta}{\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta} \quad 1.3$$

Per $\eta = .05$, tale relazione si traduce nella curva a tratteggio ingrossato in Figura 1-2. Per piccoli valori del carico l'asta si mantiene pressoché rettilinea ma avvicinando il valore di biforcazione, essa si atteggia secondo una delle configurazioni inflesse, quella verso cui è spinta dall'imperfezione.

Esaminando i valori numerici si constata che piccoli incrementi di carico comportano adesso grandi spostamenti; a un carico superiore solo del 2.5% rispetto a K/L corrisponde infatti una rotazione di quasi 0.7 radianti. Le configurazioni relative

$\vartheta < 0$ in figura, dette secondarie, sono anch'esse di equilibrio, ma non possono essere raggiunte sotto carichi crescenti, non essendo più collegate al ramo principale.

La semplicità dell'esempio ha consentito di svolgere il calcolo senza ipotesi semplificative. Alcuni aspetti della risposta tuttavia si evidenziano anche se si considerano gli spostamenti piccoli da un punto di vista puramente geometrico. Essi sono cioè ancora ritenuti tali da influenzare l'equilibrio, sempre imposto con riferimento alla configurazione deformata, ma "è considerato abbastanza piccolo da poter porre

$$\sin \vartheta = \vartheta \quad \cos \vartheta = 1 \quad \text{b1,2}$$

La (1.1)diviene allora

$$(K - PL)\vartheta = 0 \quad 1.4$$

Le soluzioni della (1.4) corrispondono alla linea piena sottile in Figura 1-2. L'equazione ammette la soluzione banale $\vartheta = 0$ e in genere questa sola soluzione. Peraltro, per $P = KIL$ il termine in parentesi si annulla e ϑ può assumere qualunque valore. L'ipotesi di piccolezza geometrica degli spostamenti non consente di seguire l'evoluzione delle configurazioni di equilibrio non banali, ma identifica il punto di biforcazione, valore del carico per cui esse divengono per la prima volta possibili.

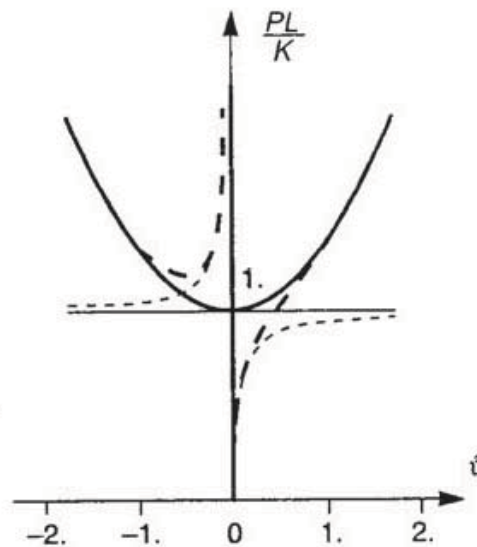


Figura 1-2

Procedendo in modo analogo con riferimento alla (1.3) si ottiene

$$(K - PL)\vartheta = \eta PL \quad 1.5$$

relazione che si traduce nella curva a tratteggio sottile in Figura 1-2. Essa presenta un asintoto orizzontale per il valore $P = KIL$, avvicinando il quale ϑ diviene illimitatamente grande.

Come ben atteso, questa soluzione semplificata coincide sostanzialmente con la precedente per valori di ϑ abbastanza ridotti da giustificare le (b). Le(1.4) consentono la seguente interpretazione. In assenza del carico P , l'asta oppone a un'azione che tenda a infletterla (ad esempio un carico trasversale) il momento di richiamo (a) della molla. Per effetto del braccio che acquista con l'inflessione, la forza P , se di

compressione, induce un momento ribaltante che si aggiunge con lo stesso segno a quello dovuto al carico trasversale; una parte del momento di richiamo è allora impegnata a contrastare questo contributo ed è sufficiente un carico trasversale minore per produrre la stessa rotazione.

La quantità $(K - PL)$ a fattore di ϑ nelle (1.4) si definisce l'effettiva rigidità flessionale dell'asta compressa. Per $P = K/L$ il momento ribaltante eguaglia quello di richiamo e l'asta diviene incapace di opporsi ad azioni flettenti comunque modeste; anche in assenza di tali azioni sono allora possibili configurazioni di equilibrio inflesse. L'eguaglianza sussiste rigorosamente per $\vartheta \rightarrow 0$ (sotto l'ipotesi (b1) l'inflessione si manifesta infatti a carico costante). La nonlinearità del legame tra il braccio della forza P e la rotazione ϑ comporta in questo caso un recupero di rigidità: il momento ribaltante cresce meno che linearmente con ϑ e le configurazioni non banali evolvono sotto carico crescente, anche se in misura inizialmente molto ridotta.

Un'imperfezione, come l'eccentricità prima considerata, costituisce un'azione flessionale in sé modesta, che non provoca sostanziali scostamenti dalla configurazione banale finché l'asta possiede una rigidità significativa.

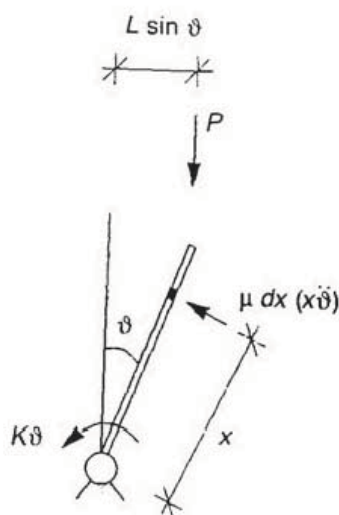


Figura 1-3

Quando però il carico avvicina il valore K/L , l'inflessione non è contrastata e anche un'imperfezione produce spostamenti notevoli. Tale aspetto è evidenziato dalla (1.4) che per $P \rightarrow K/L$ prevede, quale che sia $\eta, \vartheta \rightarrow \infty$. Ovviamente, al crescere di ϑ le (b) divengono inapplicabili e il risultato non indica che la soluzione effettivamente cessa di esistere (nel caso $\vartheta = .05$ le (1.3) associano a $P = K/L$ la rotazione $\vartheta = .628$ rad; esso peraltro stabilisce che, comunque piccola sia l'imperfezione, la soluzione, se esiste, comporta certamente spostamenti grandi rispetto alla configurazione banale, non più confondibili con la loro parte del primo ordine, ora illimitata. Per $P > K/L$ la rigidità diviene negativa; ciò giustifica l'esistenza di configurazioni di equilibrio corrispondenti a $\vartheta < 0$, di verso opposto a quello che, stante l'imperfezione considerata, l'intuizione suggerirebbe. Le considerazioni di natura statica sin qui svolte non mettono in luce il collegamento con il fenomeno di instabilità, che ha invece carattere intrinsecamente dinamico.

Una configurazione di equilibrio può dirsi stabile se piccole perturbazioni si traducono in piccole oscillazioni attorno alla configurazione stessa, cui la struttura ritorna con lo smorzamento degli effetti dinamici; essa è invece instabile se perturbazioni comunque piccole causano l'allontanamento dalla configurazione di partenza o oscillazioni di entità sproporzionata a quella della perturbazione. Per l'asta in esempio, se considerata perfetta, la configurazione banale $\vartheta = 0$ è di equilibrio per

qualunque P , ma non necessariamente di equilibrio stabile. Per valutare quando ciò si verifica, si studia l'evoluzione dinamica della struttura perturbata; la perturbazione sia definita dalle condizioni iniziali

$$\vartheta(0) = \vartheta_0 \quad \dot{\vartheta}(0) = \dot{\vartheta}_0 \quad 1.6$$

dove un punto sovrapposto al simbolo indica la derivata rispetto al tempo. L'indagine richiede che alla struttura venga conferita una massa. Si suppone che questa sia uniforme e valga μ per unità di lunghezza. Si suppone anche che sia $\mu L g \ll P$ dove g indica l'accelerazione di gravità: il peso proprio è cioè trascurabile nei confronti della forza in sommità e non altera il regime statico. L'equilibrio dinamico considera, oltre al momento del carico P e a quello di richiamo della molla, anche il contributo delle forze d'inerzia, proporzionali all'accelerazione e che si oppongono al moto (Figura 1-3). Risulta

$$PL \sin \vartheta - k\vartheta - \int_0^L x(x\ddot{\vartheta})\mu dx = 0$$

È questa l'equazione che governa le vibrazioni libere della struttura. Essendo di interesse solo oscillazioni di piccola entità, essa può essere linearizzata ponendo $\sin \vartheta = \vartheta$. Si ottiene allora l'equazione differenziale

$$\ddot{\vartheta}(t) + 3 \frac{K - PL}{\mu L^3} \vartheta = 0 \quad 1.7$$

da integrarsi sotto le condizioni iniziali 1.6 Si distinguono due casi:

$P < \frac{K}{L}$. Il coefficiente di ϑ nella (1.7) è positivo. Posto

$$\omega^2 = 3 \frac{K - PL}{\mu L^3} > 0 \quad 1.8$$

La soluzione delle (1.6) risulta

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \dot{\vartheta}_0 \sin \omega t \quad 1.9$$

La struttura oscilla con periodo ωt e ampiezza proporzionale all'entità della perturbazione iniziale: piccole perturbazioni si traducono in piccole oscillazioni attorno alla configurazione $\vartheta = 0$, che è di equilibrio stabile.

$P > \frac{K}{L}$. La (1.7) può scriversi

$$\ddot{\vartheta}(t) - \alpha^2 \vartheta(t) = 0 \quad \text{con} \quad \alpha^2 = 3 \frac{PL - K}{\mu L^3} > 0$$

e la soluzione risulta

$$\vartheta(t) = \frac{1}{2} \left(\vartheta_0 + \frac{1}{\alpha} \dot{\vartheta}_0 \right) e^{\alpha t} + \frac{1}{2} \left(\vartheta_0 - \frac{1}{\alpha} \dot{\vartheta}_0 \right) e^{-\alpha t} \quad 1.10$$

della perturbazione, si amplifica nel tempo, indicando che $\vartheta = 0$ è di equilibrio instabile. La (

$$\vartheta(t) = \frac{1}{2} \left(\vartheta_0 + \frac{1}{\alpha} \dot{\vartheta}_0 \right) e^{\alpha t} + \frac{1}{2} \left(\vartheta_0 - \frac{1}{\alpha} \dot{\vartheta}_0 \right) e^{-\alpha t} \quad 1.10)$$

è valida solo finché ϑ si mantiene abbastanza piccolo da legittimare la linearizzazione dell'equazione del moto e non permette di seguire l'evoluzione della

struttura. Nel caso in esame, questa abbandona la configurazione banale, avvicinando uno dei percorsi diramati in Figura 15.2a, attorno al quale le oscillazioni si stabilizzano.

Il valore del carico $P_E = \frac{K}{L}$ cui la configurazione di equilibrio banale cessa di essere stabile coincide con il punto di biforcazione identificato dall'analisi statica. La coincidenza non è casuale: la quantità ω_2 definita dalla (1.8) come rapporto tra la rigidezza $(K - P)$ della struttura e la sua massa equivalente $\mu L^3/3$, rappresenta il quadrato della frequenza delle vibrazioni libere o frequenza propria, della struttura. Il moto ha carattere oscillatorio se ω_2 è positivo (se cioè ω è reale; per $P > P_E$ risulta $\omega = i_\alpha$ con $i = \sqrt{-1}$). È importante però osservare che il segno di ω_2 coincide con quello della rigidezza $(K - PL)$: il comportamento dinamico della struttura degenera in quanto la sua rigidezza si è deteriorata fino ad annullarsi.

L'instabilità della configurazione banale è sì un fenomeno dinamico, ma nel caso in esame solo indirettamente tale, essendo indotto unicamente dalla perdita di rigidezza. I problemi Euleriani di stabilità sono caratterizzati dalla presenza di una configurazione di equilibrio fondamentale (o banale), quale quella rettilinea in un'asta compressa.

Essa non è necessariamente indeformata, ma è comunque linearmente legata al carico; il comportamento è cioè lineare in fase pre-critica e la configurazione fondamentale può essere calcolata operando in piccoli spostamenti.

Il carico tuttavia deteriora la rigidezza che la struttura presenta nei confronti di modi deformativi non direttamente attivati, ortogonali alla configurazione banale. Raggiunto un particolare valore, detto carico critico Euleriano, la rigidezza di uno di questi modi per la prima volta si annulla; il modo può allora sovrapporsi alla soluzione banale nella risposta, dando luogo a una biforcazione nei percorsi di equilibrio. Il carico critico Euleriano verrà d'ora in avanti indicato con l'indice E .

Esistono validi motivi per definire "critico" il carico P_E . Innanzi tutto la struttura, priva di rigidezza nei confronti di quantomeno un modo deformativo, non è in grado di opporsi ad azioni anche modestissime, dell'ordine di quelle definite come imperfezioni, trascurate nelle ordinarie schematizzazioni di calcolo ma dalla cui presenza non si può prescindere: esse causano allora spostamenti notevoli, che portano inevitabilmente a collasso. In secondo luogo, il deterioramento della rigidezza influenza il comportamento dinamico della struttura perturbata, che cessa di essere oscillatorio.

Per $P > P_E$ la configurazione banale è di equilibrio instabile e di fatto non può sussistere: perturbazioni di entità comunque ridotta causano infatti un allontanamento della struttura da tale configurazione. Il fenomeno è legato alla perdita di rigidezza, il che consente di affrontare i problemi Euleriani in ambito statico.

1.2 Stazionarietà e minimo dell'energia potenziale

Il dominio di definizione dell'Energia Potenziale Totale è l'insieme delle deformate congruenti della struttura. Per i sistemi discreti (olonomi e con vincoli bilateri) in esame, la più generale configurazione congruente è esprimibile in termini di un vettore x di coordinate Lagrangiane; se n è il numero dei gradi di libertà del sistema, l'E.P.T. è quindi una funzione di n variabili libere.

Tra tutte le configurazioni congruenti, rivestono ovviamente interesse quelle che sono anche di equilibrio (il plurale è d'obbligo, non essendo in grandi spostamenti assicurata l'unicità della soluzione), in particolare quelle di equilibrio stabile.

Si mostra ora che la funzione E.P.T. presenta un minimo, quanto meno locale, in corrispondenza di queste configurazioni.

La configurazione x_0 , può considerarsi di equilibrio stabile se piccole perturbazioni provocano solo piccole oscillazioni attorno a x_0 , configurazione cui la struttura torna con lo smorzamento degli effetti dinamici. Anche se le sue connessioni con una definizione generale di stabilità richiede alcune precisazioni è questa una definizione spontanea, che viene adottata ai fini della trattazione che segue.

Più precisamente, si considera una perturbazione costituita da velocità iniziali \dot{x}_0 attribuite alle coordinate libere: essa introduce nella struttura, precedentemente in quiete nella configurazione x_0 , un'energia cinetica pari a $T(x_0) = \frac{1}{2} \dot{x}_0^t M \dot{x}_0$, dove M è la matrice delle masse.

Si dice che x_0 è di equilibrio stabile se nel moto che consegue alla perturbazione l'energia cinetica non eccede mai il valore iniziale. Sia $x(t)$ la configurazione in cui la struttura perturbata si trova all'istante t della sua evoluzione dinamica.

$$T(x) = T(x_0) - [V(x) - V(x_0)] = T(x_0) - \Delta V(x_0, x) \quad 1.11$$

Se V è minima in x_0 , risulta $\Delta V(x_0, x) \geq 0 \forall x$ nell'intorno di x_0 : la (1.10) assicura allora che è sempre $T(x) \leq T(x_0)$ e durante il moto l'energia cinetica non eccede il valore introdotto dalla perturbazione. In caso contrario esistono invece percorsi lungo cui V diminuisce e conseguentemente T aumenta, con un incremento delle velocità rispetto al valore iniziale e l'amplificazione del moto; x_0 è allora instabile. Questo risultato è noto come teorema della minima Energia Potenziale Totale.

Si osservi che una configurazione è definita stabile se l'E.P.T. presenta in essa un minimo anche locale: è infatti solo richiesto che l'ampiezza del moto tenda a zero con la perturbazione che lo induce e non che perturbazioni di qualsiasi entità non siano fonte di inconvenienti.

Un'espressiva rappresentazione del comportamento si ottiene identificando la struttura con una massa sferica che poggia senza attrito su una superficie rappresentativa dell'E.P.T. (Figura 1-4). Benché perturbazioni notevoli possano causare lo scavalco dei massimi adiacenti, le configurazioni indicate con A e D sono di equilibrio stabile: per perturbazioni di entità limitata il moto rimane infatti confinato nell'intorno della configurazione.

Le configurazioni B, C e E, pure di equilibrio, sono invece instabili, in quanto

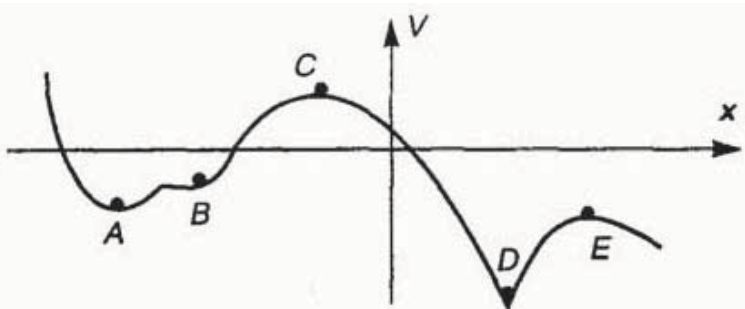


Figura 1-4

perturbazioni comunque piccole provocano l'allontanamento della sfera dalla posizione di partenza. Si ponga

$$x = x_0 + \delta x \quad 1.12$$

Il vettore δx definisce il generico cambiamento di configurazione da x_0 e il suo modulo rappresenta la distanza tra x_0 e x nello spazio delle configurazioni.

Perché la funzione E.P.T. presenti un minimo locale in x_0 , il suo valore deve aumentare per ogni cambiamento di configurazione nell'intorno di x_0 . Per la (1.12) la condizione si esprime

$$\Delta V(x_0, x_0 + \delta x) > 0 \quad \forall \delta x, |\delta x| \rightarrow 0 \quad 1.13$$

Nella quasi totalità dei casi di interesse, la funzione $V(x)$ è sufficientemente regolare da ammettere uno sviluppo in serie di Taylor attorno a x_0 . Si può allora scrivere

$$\Delta V(x_0, x_0 + \delta x) = \delta V(x_0, x_0 + \delta x) + \frac{1}{2} \delta^2 V(x_0, x_0 + \delta x) + \dots \quad 1.14$$

dove i termini, rispettivamente lineare e quadratico in δx

$$\delta V(x_0, x_0 + \delta x) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)_{x_0} \delta x_i \quad 1.15$$

$$\frac{1}{2} \delta^2 V(x_0, x_0 + \delta x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{x_0} \delta x_i \delta x_j \quad 1.16$$

sono noti come variazioni prima e seconda di V ; i successivi contributi, trascurati nella (1.14), sono dell'ordine di $|\delta x|^3$.

Al diminuire di $|\delta x|$, i termini di ordine più basso prevalgono. In particolare, per $|\delta x| \rightarrow 0$ la variazione prima diviene dominante e, perché la (1.13) sia verificata, dovrebbe risultare sempre positiva; è peraltro evidente che δV , in quanto funzione lineare delle componenti di δx , se diversa da zero può assumere entrambi i segni. Condizione necessaria perché la configurazione x_0 sia di equilibrio stabile è quindi

$$\delta V(x_0, x_0 + \delta x) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)_{x_0} \delta x_i = 0 \quad \forall \delta x \quad 1.17$$

Nel rispetto della (1.17), per $|\delta x| \rightarrow 0$ il segno di δV coincide con quello della variazione seconda. La (1.13) è pertanto verificata se risulta

$$\frac{1}{2} \delta^2 V(x_0, x_0 + \delta x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{x_0} \delta x_i \delta x_j > 0 \quad \forall \delta x \quad 1.18$$

A rigore, le (1.17,1.18) rappresentano soltanto una condizione sufficiente per la stabilità di x_0 . Non si può infatti escludere che anche la variazione seconda si annulli, il che richiederebbe di esaminare i successivi termini dello sviluppo (1.14). Tale circostanza è tuttavia limitata a pochi casi di interesse puramente accademico. Per problemi ingegneristicamente significativi, le (1.17,1.18) possono essere ritenute condizioni necessarie e sufficienti perché la configurazione x_0 sia di equilibrio stabile.

La (1.17) impone la stazionarietà della funzione E.P.T., condizione equivalente all'imposizione dell'equilibrio. Questa equazione traduce quindi l'ovvia affermazione che, perché una configurazione sia di equilibrio stabile, condizione necessaria è che essa sia quanto meno di equilibrio. Per stabilire la qualità dell'equilibrio, la sola stazionarietà non è però sufficiente e occorre anche valutare il segno della variazione seconda. È immediato constatare come le (1.17,1.18) altro non siano che le condizioni di minimo locale per una funzione analitica di n variabili indipendenti.

Operativamente, la condizione di stazionarietà (1.17) viene usata per identificare le configurazioni di equilibrio. Dal momento che le x_i sono coordinate Lagrangiane, le loro variazioni δx_i possono assumere, nel rispetto della congruenza, valori arbitrari. La (1.17) si riconduce allora al seguente sistema di n equazioni algebriche (in generale non lineari)

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad 1.19$$

le cui soluzioni identificano appunto le configurazioni di equilibrio del sistema discreto. Per stabilire se queste siano o meno stabili, occorre verificare, con riferimento a ognuna di esse, la condizione (1.18). In notazione matriciale, la variazione seconda dell'E.P.T. si scrive

$$\frac{1}{2} \delta^2 V(x_0, x_0 + \delta x) = \frac{1}{2} \delta x^t \mathbf{K}_0 \delta x \quad 1.20$$

dove si è indicata con \mathbf{K}_0 la matrice di componenti

$$K_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{x_0} \quad 1.21$$

Essa è a questo punto nota, essendola x_0 , ed evidentemente simmetrica ($\mathbf{K}_0^t = \mathbf{K}_0$). La configurazione in esame è di equilibrio stabile se la forma quadratica (1.20) è definita positiva, vale a dire maggiore di zero per ogni $\delta x \neq 0$. Le condizioni che \mathbf{K}_0 deve rispettare perché ciò si verifichi costituiscono un classico capitolo dell'algebra matriciale.

1.3 Teoria del secondo ordine

Nella pratica ingegneristica, sono spesso di interesse solo spostamenti di piccola entità, pur se tali da influenzare il regime statico. È allora possibile linearizzare il problema, sostituendo l'espressione dell'E.P.T. con una sua approssimazione ragionevolmente accurata nell'intorno della configurazione di riferimento $x = 0$. Si sviluppi $V(x)$ in serie di Taylor attorno a questa configurazione: ponendo al solito $V(0) = 0$, si scrive

$$V(x) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)_0 x_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 x_i x_j + o(|x|^3) \quad 1.22$$

Trascurando nello sviluppo (1.22) i termini dell'ordine di $|x|^3$, si ottiene

$$V(x) \cong V_2(x) = - \sum_{i=1}^n P_i x_i + \frac{1}{2} K_{ij} x_i x_j = -\mathbf{P}^t \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \mathbf{K} \mathbf{x} \quad 1.23$$

dove si è posto

$$P_i = - \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)_0 \quad K_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 \quad 1.24$$

L'approccio detto del secondo ordine opera su questa approssimazione. Le equazioni che traducono la condizione di stazionarietà, si scrivono

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n K_{ij} x_j - P_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{P} \quad 1.25$$

Sono queste le equazioni risolventi, la cui soluzione x_0 identifica la configurazione di equilibrio del sistema discreto. Questa è stabile se la condizione (1.18) risulta soddisfatta. Dalle (1.23) consegue

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = K_{ij} = \text{cost}$$

e la variazione seconda dell'E.P .T. pertanto risulta

$$\frac{1}{2} \delta^2 V(x_0, x_0 + \delta x) = \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}^t \mathbf{K} \delta \mathbf{x} \quad 1.26$$

Le componenti di \mathbf{K} sono definite dalla (1.24) e si rivelano indipendenti dalla configurazione di equilibrio \mathbf{x}_0 .

È importante osservare che gli sviluppi in serie di Taylor (1.22) e (1.14) hanno significato profondamente diverso. Il primo viene stabilito a partire da una configurazione di equilibrio, allo scopo di esplicitare le condizioni per cui l'E.P.T. è ivi minima; nel secondo caso invece, $V(x)$ è sviluppato in serie attorno alla configurazione di riferimento, in generale non di equilibrio, per stabilire l'approssimazione (1.23), valida in un intorno di $x = 0$. Se si accetta l'approssimazione, con riferimento a essa si opera in modo assolutamente identico che per l'espressione originaria di $V(x)$. Essendo V_2 funzione quadratica delle coordinate Lagrangiane, le equazioni di equilibrio che ne discendono per stazionarietà risultano lineari. Se \mathbf{K} non è singolare, esse hanno sempre una e una sola soluzione; il procedimento non fornisce quindi indicazioni riguardo a eventuali configurazioni di equilibrio multiple, ma si limita a calcolare quella "più vicina" alla configurazione di riferimento.

Se $\det(\mathbf{K}) = 0$, il sistema (1.25) non ha soluzione o ne ammette infinite: se esiste una soluzione, le si possono infatti sovrapporre quelle del sistema omogeneo associato. Il risultato è ovviamente significativo solo se le componenti di \mathbf{x} sono abbastanza piccole da giustificare l'approssimazione (1.23); in caso contrario, si deve concludere che l'equilibrio non può instaurarsi che in configurazioni molto discoste da quella di riferimento. Anche l'indagine di stabilità ha come oggetto la sola soluzione delle (1.25). Un esito negativo non esclude l'esistenza di configurazioni di equilibrio stabile per la struttura sotto lo stesso carico; se queste esistono, presentano tuttavia spostamenti grandi rispetto a $x = 0$.

L'approccio è noto col nome di teoria del secondo ordine, in quanto lo sviluppo (1.22) viene appunto troncato a tale ordine. Come l'esempio illustra, ciò equivale considerare gli spostamenti piccoli dal punto di vista geometrico, ma sempre tali da influenzare l'equilibrio; questo viene imposto sulla configurazione deformata della struttura, rimuovendo così, sia pure parzialmente, l'ipotesi di piccoli spostamenti. La terminologia è a volte usata in contrasto con quella di teoria del primo ordine, riferita all'applicazione dell'ipotesi di piccoli spostamenti nella sua interezza. Non si intende con questo che nello sviluppo (1.22) vengano conservati solo i contributi lineari, il che non consentirebbe di scrivere le equazioni di equilibrio; si allude piuttosto a una

linearizzazione delle equazioni di vincolo, che vengono poi utilizzate in tal forma per esprimere l'E.P.T. in termini di coordinate Lagrangiane.

In determinate strutture, segnatamente aste presso-in flesse, l'ipotesi di piccoli spostamenti cade in difetto. Pur se sono di interesse soltanto configurazioni poco discoste da quella di riferimento, spostamenti anche modesti possono influenzare il regime statico e, se ignorati, alcuni aspetti essenziali della risposta non vengono recepiti dalla soluzione. Vi sono ovviamente strutture, come aste soggette solo a carichi trasversali, in cui gli spostamenti, se geometricamente piccoli, si rivelano ininfluenti sull'equilibrio e che possono essere convenientemente affrontate in piccoli spostamenti.

L'approssimazione (1.23) contiene però sempre tutti i termini del secondo ordine (i carichi assiali non danno contributo solo perché assenti): in un contesto energetico, il termine "teoria del primo ordine" appare pertanto poco appropriato e può risultare fonte di equivoci interpretativi.

L'approssimazione al secondo ordine per la funzione E.P.T. comporta la linearità delle equazioni di equilibrio che ne conseguono per derivazione. Le condizioni di vincolo che esprimono le coordinate naturali in funzione di quelle lagrangiane vanno quindi approssimate quadraticamente per stabilire l'espressione di V_2 , ma linearizzate se le equazioni di equilibrio vengono formulate direttamente. Si noti che la linearità delle equazioni non implica proporzionalità tra carichi e spostamenti, che sussiste solo quando l'ipotesi di piccoli spostamenti è applicata nella sua interezza. Alcuni carichi compaiono infatti nella matrice dei coefficienti del sistema (1.25) e le coordinate Lagrangiane non risultano a essi proporzionali in soluzione.

1.4 Problemi euleriani di instabilità

1.4.1 Definizione del problema

Si definisce ora, con riferimento ai sistemi discreti oggetto di questo paragrafo, la categoria dei problemi Euleriani di instabilità. Essi devono innanzi tutto presentare una configurazione di equilibrio banale, cui sarà d'ora in avanti dedicato il simbolo x_0 , nella quale la struttura risponde linearmente ai carichi applicati e che può quindi essere calcolata anche operando in piccoli spostamenti. Si indichi con P_0 il vettore dei carichi base, amplificati da un moltiplicatore o parametro di carico p . Detta x_0 la soluzione relativa ai carichi base, deve quindi risultare

$$x_0 = pX_0 \quad 1.27$$

La variazione seconda dell'E.P.T. dalla configurazione banale deve inoltre essere funzione lineare di p . Precisamente

$$\frac{1}{2} \delta^2 V(x_0, x_0 + \delta x) = \omega(\delta x) - pw(\delta x) \quad 1.28$$

I problemi Euleriani sono pertanto conservativi, in quanto l'E.P.T. del sistema non è altrimenti definibile. Pur se esistono sistemi conservativi che non rispettano le (1.27) e (1.28), la definizione include un notevole numero di situazioni di preminente interesse.

1.4.2 Il carico critico euleriano

1.4.2.1 Considerazioni preliminari

Raggiunto un determinato livello di carico, la configurazione banale di un sistema Euleriano diviene instabile e la struttura la abbandona, atteggiandosi in una notevolmente discosta. La soglia di instabilità corrisponde a un punto di biforcazione nei percorsi di equilibrio, che diviene possibile anche in configurazioni adiacenti a quella banale. Un'asta puramente compressa rappresenta un problema Euleriano: la configurazione banale, rettilinea, presenta solo un accorciamento assiale proporzionale al carico; essa diviene instabile quando l'equilibrio può sussistere anche in configurazioni inflesse. Il valore P_E del parametro di carico cui si manifesta il fenomeno è noto come carico critico Euleriano e costituisce l'informazione di primario interesse che ci si propone di ottenere.

Per quanto osservato, si possono seguire due strategie operative. P_E rappresenta innanzi tutto il limite di stabilità della configurazione banale e può essere calcolato come il valore di p per cui la forma quadratica (1.28) cessa di essere definita positiva, applicando il cosiddetto metodo energetico. Esso può anche essere identificato con il più piccolo valore di p per cui l'equilibrio diviene possibile in configurazioni adiacenti a quella banale, mediante il procedimento noto come metodo statico o di Eulero, alle cui indagini sul comportamento di lamine compresse si può far risalire l'inizio degli studi sui fenomeni di instabilità strutturale.

Si procede ora all'illustrazione di questi metodi, limitando in un primo tempo l'attenzione al caso in cui la configurazione banale coincida, per qualunque valore del carico, con quella di riferimento, relativa alla struttura scarica, come avviene in aste compresse quando se ne trascuri la deformabilità assiale. È questa un'ipotesi più restrittiva che non la (1.27), che consente di semplificare la trattazione senza peraltro limitare la generalità dei risultati.

La configurazione banale viene identificata con l'origine dello spazio delle configurazioni ponendo $\mathbf{x}_0 = 0$, il che implica, $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x}$. In luogo della (1.28) si scrive quindi

$$\frac{1}{2} \delta^2 V(\mathbf{x}_0 = 0, \mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}) - p w(\mathbf{x}) \quad 1.29$$

In alternativa, la variazione seconda dell'E.P.T. può essere espressa mediante la (1.12), che nel caso in considerazione diviene

$$\frac{1}{2} \delta^2 V(\mathbf{x}_0 = 0, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \mathbf{K} \mathbf{x} \quad 1.30$$

dove \mathbf{K} indica la matrice (1.20) valutata nella configurazione banale. Precisamente

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0(\mathbf{x}_0 = 0) \quad K_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\mathbf{x}_0=0} \quad 1.31$$

Il confronto tra le (1.29) e (1.30) stabilisce che le componenti di \mathbf{K} sono funzioni lineari del parametro di carico. La matrice può allora scriversi

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_E - p \mathbf{K}_G \quad 1.32$$

e i termini al secondo membro della (1.29) si traducono nelle forme quadratiche

$$\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \mathbf{K}_E \mathbf{x} \quad w(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \mathbf{K}_G \mathbf{x} \quad 1.33$$

Esse rappresentano, rispettivamente, la variazione seconda dell'energia di deformazione e il lavoro del secondo ordine compiuto nel cambiamento di configurazione dai carichi base, relativo quindi a $p = 1$.

Si assume inoltre

$$\omega(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad w(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \quad 1.34$$

La (1.34) implica che i vincoli escludano ogni atto di moto rigido da $\mathbf{x}_0 = 0$ il che assicura la definizione positiva dell'energia di deformazione. La (1.34), che impone alla (1.33b) di essere quanto meno semidefinita positiva, è invece un'ipotesi, spesso ma non necessariamente verificata. La sua rimozione, peraltro, modifica solo marginalmente i risultati.

1.4.2.2 Il metodo energetico

La configurazione banale di un problema Euleriano è di equilibrio stabile se la forma quadratica (1.30) è definita positiva, se cioè risulta

$$\frac{1}{2} \delta^2 V(\mathbf{x}_0 = 0, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \mathbf{K} \mathbf{x} = \omega(\mathbf{x}) - p w(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq 0 \quad 1.35$$

Per la (1.34), la condizione è verificata per $p = 0$. Se si esclude il caso privo di interesse in cui $w(\mathbf{x})$ è identicamente nullo, la disuguaglianza risulterà tuttavia violata per p sufficientemente elevati. Se scritta per una configurazione \mathbf{x}_* che comporti $w(\mathbf{x}_*) > 0$, la variazione seconda dell'E.P.T. è infatti una funzione lineare e decrescente di p , che inevitabilmente cambia di segno; a ogni \mathbf{x}_* si può quindi associare il valore p_* del carico per cui risulta

$$\frac{1}{2} \delta^2 V(\mathbf{x}_0 = 0, \mathbf{x}_*) = \omega(\mathbf{x}_*) - p_* w(\mathbf{x}_*) = 0 \quad 1.36$$

In quanto lineare, $\frac{1}{2} \delta^2 V(0, \mathbf{x}_*)$ risulterà negativa per ogni $p > p_*$. La configurazione banale cessa quindi definitivamente di essere stabile una volta raggiunto il minimo tra i valori p_* così definiti, che rappresenta il carico critico Euleriano p_E del sistema. Esiste allora almeno una configurazione non banale che comporta variazione seconda nulla, ma ancora nessuna per cui sia negativa. È pertanto

$$\omega(\mathbf{x}) - p_E w(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^t (\mathbf{K}_E - p_E \mathbf{K}_G) \mathbf{x} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \quad 1.37$$

dove il segno di eguaglianza vale per almeno un $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Per $p = p_E$ la variazione seconda dell'E.P.T. è dunque semidefinita positiva e, di conseguenza, la matrice \mathbf{K} della forma quadratica diviene singolar. Peraltro, $\frac{1}{2} \delta^2 V$ era precedentemente definita positiva e tutti i minori principali di \mathbf{K} , incluso il determinante, risultavano strettamente maggiori di zero. La configurazione banale cessa quindi di essere di equilibrio stabile quando il determinante di \mathbf{K} si annulla per la prima volta e il carico critico Euleriano del sistema si calcola come la più piccola radice dell'equazione

$$\det(\mathbf{K}) = 0 \quad 1.38$$

1.4.2.3 Il metodo statico

Il calcolo del carico critico si riconduce adesso alla ricerca dei punti di biforcazione nei percorsi rappresentativi della risposta della struttura, quando l'equilibrio diviene possibile in configurazioni adiacenti a quella banale.

L'indagine non può essere svolta in piccoli spostamenti, ipotesi che, comportando unicità di soluzione, non permetterebbe di individuare biforcazioni.

Ai fini della valutazione del carico critico sono tuttavia di interesse solo i punti da cui le configurazioni di equilibrio diramate dipartono da quella banale: è quindi possibile operare al secondo ordine, rimuovendo l'ipotesi solo parzialmente. L'equilibrio viene imposto sulla configurazione deformata, linearizzando però le equazioni di vincolo. Dovendo risultare soddisfatte dalla soluzione banale $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, le condizioni di equilibrio si traducono in un sistema omogeneo, che può scriversi

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad 1.39$$

Le (1.39) sono anche note come equazioni dell'equilibrio variato, intendendo con questo che esse si riferiscono a configurazioni deformate, ma abbastanza poco da legittimarne la linearizzazione.

Esse ammettono soluzioni non banali solo se la matrice \mathbf{M} è singolare. I punti di biforcazione sono pertanto le radici dell'equazione

$$\det(\mathbf{M}) = 0 \quad 1.40$$

Il carico critico Euleriano è il più piccolo valore di p che risolve la (1.40); la soluzione non banale della (1.39) definisce la deformata critica (o modo critico) del sistema.

Le equazioni dell'equilibrio variato possono anche ottenersi dalla stazionarietà dell'E.P.T. approssimata al secondo ordine. Il termine lineare nella (1.23) ha adesso il significato di variazione prima dalla configurazione banale e, essendo questa di equilibrio, risulta inevitabilmente nullo.

Per i problemi in esame, la (1.23) si riconduce quindi alla forma quadratica

$$V_2 = \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \mathbf{K} \mathbf{x} \quad 1.41$$

Imponendone la stazionarietà, si perviene al sistema lineare e omogeneo

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad 1.42$$

per il quale valgono le considerazioni precedenti. In particolare, i punti di biforcazione sono le radici dell'equazione

$$\det(\mathbf{K}) = 0 \quad 1.43$$

1.4.2.4 Considerazioni sul significato di carico critico

Come asserito, i metodi statico ed energetico conducono allo stesso valore del carico critico di un sistema Euleriano. Le forme quadratiche (1.29), (1.30) e (1.41) sono infatti associate alla stessa matrice: dal momento che la configurazione di riferimento coincide con quella di equilibrio banale, le componenti di \mathbf{K} sono in

entrambi i casi le derivate seconde di V calcolate in $x = 0$. Il più piccolo valore di p che ne annulla il determinante risponde quindi alle domande poste da entrambi i criteri. Le due forme quadratiche hanno però significato diverso e diverso è pure quello delle operazioni a esse riferite.

La più piccola soluzione della (1.38) definisce il carico per cui l'E.P.T. cessa di essere minima nella configurazione banale, determinandone il limite di stabilità; la (1.43) impone invece che V_2 sia stazionaria anche in configurazioni non banali e le sue soluzioni identificano i punti di biforcazione nella risposta.

I due criteri si propongono infatti la valutazione dei livelli di carico per cui si verificano due fenomeni diversi, entrambi "critici", a volte distinti in letteratura con differenti denominazioni. In problemi Euleriani, essi si manifestano contemporaneamente.

Il metodo statico identifica il carico critico con il primo punto di biforcazione aggiunto lungo il percorso rappresentativo della risposta della struttura sotto carichi crescenti. La configurazione fondamentale del sistema, direttamente attivata dai carichi, si confronta allora con alternative: altri modi deformativi hanno perso completamente di rigidezza, rendendo la struttura incapace di opporsi a deformazioni secondo tali modi, che appaiono nella soluzione come diramazioni dal percorso principale.

La comparsa di soluzioni non banali configura un fenomeno critico in quanto l'inevitabile presenza di piccole imperfezioni fa sì che la risposta non coincida con la soluzione fondamentale, relativa a uno schema ideale o perfetto; lo scostamento è modesto fintanto che la struttura possiede una rigidezza significativa nei confronti di ogni altro modo deformativo, ma quando la rigidezza di uno di questi svanisce, la struttura, incapace di contrastarlo, trova l'equilibrio in configurazioni notevolmente discoste comunque piccole siano le imperfezioni.

Questo evento critico, a volte indicato come instabilità statica o latente, non è proprio della particolare categoria di problemi sin qui considerati. La configurazione fondamentale di una struttura è di regola deformata e, in problemi non Euleriani, può essa stessa presentarsi non linearmente legata ai carichi, in contrasto con l'ipotesi (1.27). Nel suo calcolo si prescinde comunque dalle imperfezioni, assumendo tacitamente che, se piccole, la loro presenza modifichi poco i risultati. Ciò tuttavia non è più vero in prossimità dei punti di biforcazione, dove la struttura diviene estremamente sensibile alle imperfezioni.

Il metodo energetico calcola invece la soglia di instabilità della configurazione fondamentale. Quando il carico supera il valore critico, questa diviene una soluzione teorica, che non può di fatto sussistere. Se, come inevitabile, la struttura viene perturbata, la sua risposta non rimane confinata nell'intorno della configurazione di partenza, dando luogo al fenomeno di instabilità dinamica o dell'equilibrio. Per cautelarsi nei confronti di questa evenienza, ovviamente critica, occorre in generale esaminare il comportamento dinamico della struttura perturbata. In sistemi conservativi, l'indagine dinamica viene sostituita dallo studio dell'andamento dell'E.P.T. nell'intorno della configurazione fondamentale. Per problemi Euleriani lo

studio si traduce nel metodo energetico.

I due fenomeni sono tra loro diversi e sarebbe necessario cautelarsi nei confronti di entrambi. In problemi Euleriani essi però si manifestano contemporaneamente, in quanto dovuti alla stessa causa. Se la configurazione banale viene perturbata, la struttura risponde con piccole oscillazioni attorno alla configurazione stessa se e solo se presenta un'effettiva rigidezza nei confronti di qualunque modo deformativo. Quando un modo assume rigidezza nulla, non solo compaiono soluzioni non banali ma viene anche raggiunto il limite di stabilità della configurazione banale. Per $p = p_E$ imperfezioni comunque piccole causano grandi spostamenti secondo la deformata

critica e per $p > P_E$ perturbazioni comunque piccole provocano l'allontanamento dalla configurazione banale, cui la struttura non ritorna con lo smorzamento degli effetti dinamici.

\mathbf{K} è nota come matrice di rigidità del sistema. Questo è in grado di opporsi a qualunque cambiamento di configurazione da $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ fintanto che essa si mantiene definita positiva, mentre il comportamento diviene patologico quando \mathbf{K} non è più tale. Se i vincoli impediscono ogni atto di moto rigido, la definizione positiva di \mathbf{K} è assicurata per la struttura scarica: essa coincide allora con la sola matrice \mathbf{K}_E , nota come rigidità elastica. Come la (1.32) evidenzia, gli effetti del carico intervengono attraverso la matrice \mathbf{K}_G , detta rigidità geometrica o da sforzo iniziale. La denominazione sottolinea che essa incorpora l'influenza che i carichi (e conseguenti sforzi) presenti nella configurazione banale esercitano per effetto di un cambiamento di geometria. Se questi causano un deterioramento della rigidità complessiva, si raggiunge un valore critico in corrispondenza del quale \mathbf{K} diviene per la prima volta singolare.

1.4.3 Influenza della deformabilità assiale

L'ipotesi che identifica, per ogni valore del carico, la configurazione di equilibrio banale con quella indeformata configura un'approssimazione. Anche nel più semplice dei problemi Euleriani, relativo ad aste puramente compresse, la configurazione banale è deformata assialmente. Queste deformazioni sono trascurabili nei confronti di quelle flessionali ed è normalmente lecito ignorarle; esse sono tuttavia presenti e se ne vogliono esaminare gli effetti.

L'indagine viene riferita al sistema in Figura 1-5a: le deformabilità assiale e flessionale sono concentrate in due molle, rispettivamente di rigidità k e K . Come coordinate Lagrangiane si assumono l'accorciamento η e la rotazione ϑ delle molle stesse, ponendo $x_1 = \eta$ e $x_2 = \vartheta$. La configurazione indeformata corrisponde a $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Supponendo ivi nullo il suo valore, l'E.P.T. del sistema si scrive

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}K\vartheta^2 + \frac{1}{2}k\eta^2 - P[L - (L - \eta)\cos\vartheta] \quad 1.44$$

I primi due addendi rappresentano l'energia di deformazione delle molle e il termine a fattore di P la componente verticale di spostamento dell'estremo libero (Figura 1-5a). Le equazioni di equilibrio (1.19) si scrivono quindi

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} = k\eta - P\cos\vartheta = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = K\vartheta - P(L - \eta)\sin\vartheta = 0 \quad 1.45$$

È facile verificare che esse ammettono la soluzione

$$x_{01} = \eta_0 = \frac{P}{k} \quad x_{02} = \vartheta_0 = 0 \quad 1.46$$

che definisce la configurazione banale del problema. Essa è rettilinea, ma deformata assialmente, risultando comunque in accordo con l'ipotesi (1.27).

Per verificare se questa configurazione (non necessariamente la sola di equilibrio) sia o meno stabile, si esamina la variazione seconda dell'E.P.T. da essa. Questa risulta

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \delta^2 V(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}) \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \right)_{\mathbf{x}_0} \delta \eta^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \eta \partial \vartheta} \right)_{\mathbf{x}_0} \delta \eta \delta \vartheta + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} \right)_{\mathbf{x}_0} \delta \vartheta^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \{ k \delta \eta^2 + 2P \sin \vartheta_0 \delta \eta \delta + [K - P(L - \eta_0) \cos \vartheta_0] \delta \vartheta^2 \} \\
&= \frac{1}{2} \left[k \delta \eta^2 + \left(K - PL + \frac{p^2}{k} \right) \delta \vartheta^2 \right]
\end{aligned} \tag{1.47}$$

dove si sono indicate con $\delta \eta, \delta \vartheta$ (quest'ultima uguale a ϑ) le variazioni di configurazione da \mathbf{x}_0 .

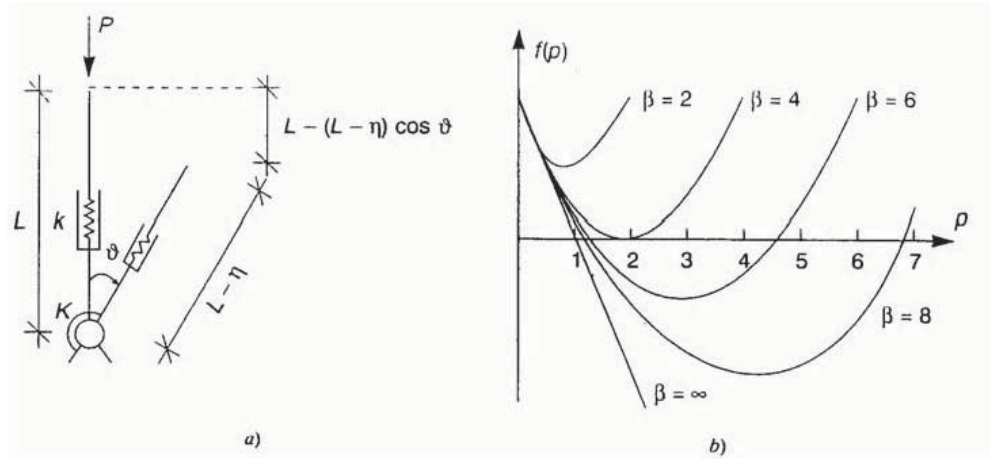


Figura 1-5

La (1.47) è funzione quadratica del carico e non rispetta l'ipotesi (1.28): se si considera la sua deformabilità assiale, un'asta compressa non è a rigore un problema Euleriano.

La configurazione banale è comunque di equilibrio stabile se la forma quadratica (1.47) è definita positiva. Devono a tal fine risultare maggiori di zero i coefficienti dei termini quadratici. Dal momento che k lo è sempre, la condizione di stabilità si scrive $K - PL + \frac{P^2}{k} > 0$. Introducendo le quantità adimensionali

$$p = P \frac{L}{K} \quad \beta = \frac{kL^2}{K} \tag{1.48 a,b}$$

e ricordando che è $K > 0$, essa si riconduce alla forma equivalente

$$f(p) = 1 - p + \frac{p^2}{\beta} > 0 \tag{1.49}$$

La disuguaglianza è soddisfatta per $p = 0$, ma al crescere del carico può cessare di esserlo. La funzione $f(p)$ cambia di segno in corrispondenza dei valori

$$p_1 = \frac{\beta}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4/\beta} \right) \quad p_2 = \frac{\beta}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4/\beta} \right) \tag{ac}$$

soluzioni dell'equazione di secondo grado $f(p) = 0$. Per $\beta < 4$ l'equazione non ha radici reali: $f(p)$ è allora sempre positiva e la configurazione banale di equilibrio stabile per qualunque carico. Se è invece $\beta > 4$, la funzione si annulla per $p = p_1$ e diviene successivamente negativa, tornando però positiva per $p > p_2$. Esiste quindi

una soglia di instabilità per la configurazione banale, che tuttavia ridiventa stabile sotto carichi più elevati. Si conclude dunque

$$\beta < 4: \mathbf{x}_0 \text{ sempre stabile}$$

1.50

$$\beta > 4: \mathbf{x}_0 \text{ stabile per } \begin{cases} p < \frac{\beta}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4/\beta}\right) \\ p > \frac{\beta}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4/\beta}\right) \end{cases} \quad 1.51$$

La funzione $f(p)$ è diagrammata in Figura 1-5b per alcuni β . Una curva si riferisce al valore di transizione $\beta = 4$, quando la funzione si annulla per $p = 2$, risultando altrimenti positiva. Al crescere di β , il termine p^2/β perde di importanza e la funzione avvicina la retta indicata con $\beta = \infty$.

Come la (1.15) evidenzia, β definisce la rigidezza relativa tra le due molle e un valore elevato indica deformabilità assiale modesta in rapporto a quella flessionale. Per $\beta \rightarrow \infty$ si ritrova l'asta assialmente rigida e il valore $p_1 = 1$ relativo a questa situazione coincide con il carico critico. La deformabilità assiale modifica i risultati in modo apparentemente drastico, quantomeno perché può non esistere una soglia di instabilità per la configurazione banale e perché questa torna comunque a essere stabile sotto carichi sufficientemente elevati. È questa una conseguenza del fatto che la condizione (1.28) non è rispettata e che quindi il problema non è a rigore Euleriano.

La deformabilità assiale si rivela però ininfluente quando il suo rapporto con quella flessionale è quello che si riscontra in situazioni reali. Se le rigidezze delle due molle sono definite in modo da riprodurre i valori relativi a un'asta omogenea, β risulta dell'ordine di 10^3 . I valori del carico (ac) per cui $f(p)$ cambia di segno sono allora certamente reali ed è lecito approssimarli al primo ordine in $1/\beta$. Si ottiene

$$p_1 \cong 1 + \frac{1}{\beta} \quad p_2 \cong \beta - 1 - \frac{1}{\beta} \quad 1.52$$

La configurazione banale diviene pertanto instabile per carichi solo marginalmente superiori a quello previsto nell'ipotesi di indeformabilità assiale e torna stabile per valori irrealisticamente elevati.

Che p_2 sia tale è confermato anche dall'entità dell'accorciamento che gli corrisponde nella configurazione banale: il valore di η_0 che si ottiene per $p = p_2$ dalla (1.46) è, per β elevati (i soli di effettivo interesse), quasi pari alla lunghezza originaria dell'asta. Il comportamento del sistema differisce quindi in modo sostanziale da quello di un problema Euleriano solo per deformabilità assiali inconcepibili in situazioni reali, tali da indurre, precedentemente all'instabilità, significative riduzioni di lunghezza. Per $\beta < 4$ l'instabilità neppure si manifesta, in quanto l'accorciamento aumenta così rapidamente che il rapporto tra il carico e la lunghezza corrente non raggiunge mai il valore critico. Questi fenomeni si evidenziano solo se non si impongono restrizioni all'entità degli spostamenti. La deformabilità assiale è però solitamente così modesta da legittimare l'impiego della teoria del secondo ordine. La (1.44) viene allora sostituita dall'espressione

$$V_2(\mathbf{x}) = -P\eta + \frac{1}{2}[k\eta^2 + (K - PL)\vartheta^2] \quad 1.53$$

da cui si ottengono, in luogo delle (1.45), le equazioni di equilibrio

$$\begin{cases} k\eta = P \\ (K - PL)\vartheta = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & (K - PL) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta \\ \vartheta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 1.54$$

Le due equazioni risultano adesso disaccoppiate. Esse ammettono ancora la soluzione banale (1.46), ma per $P = KIL$ l'equilibrio è possibile anche per $\vartheta \neq 0$. Solo per semplicità si è imposto che la configurazione banale coincidesse, per ogni valore del carico, con quella indeformata. L'ipotesi non è essenziale, purché la teoria del secondo ordine sia applicabile e le relative equazioni di equilibrio si presentino nella forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{E0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{E1} - p\mathbf{K}_{G1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \end{Bmatrix} = p \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad 1.55$$

Dalle (1.55) si ottiene la soluzione banale

$$\mathbf{x}_0 = p\mathbf{K}_{E0}^{-1}\mathbf{P}_0 \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \quad 1.56$$

e l'equilibrio sussiste anche in configurazioni adiacenti quando risulta

$$\det(\mathbf{K}_{E1} - p\mathbf{K}_{G1}) = 0 \quad 1.57$$

Alla configurazione banale si può allora sovrapporre una $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$. Deve quindi esistere un disaccoppiamento tra le equazioni che governano la configurazione banale, direttamente attivata dai carichi ma che presenta rigidità indipendente dai carichi stessi, e quelle relative ai modi che non intervengono nella soluzione fintanto che il carico non ne ha annullato la rigidità.

La (1.56), che coincide con l'ipotesi (1.29), riflette la linearità pre-critica del sistema. Il disaccoppiamento tra \mathbf{x}_0 e \mathbf{x}_1 stabilisce invece l'ortogonalità tra la configurazione banale e quelle che divengono possibili in corrispondenza delle soluzioni della (1.57), tra cui la deformata critica.

1.5 Instabilità flessionale di aste compresse

1.5.1 E.P.T. di travi caricate assialmente

I risultati ottenuti per sistemi discreti verranno considerati validi con le necessarie modifiche ma senza ulteriori dimostrazioni, anche per strutture continue. Si esaminano dapprima travi caricate assialmente, quale quella in Figura 1-6a, di sezione costante e uniformemente compressa da un carico P applicato all'estremo di destra, che si suppone vincolata così da potersi spostare solamente nel piano del disegno. Il modello cinematico ne definisce la configurazione mediante le componenti $u(x)$, $v(x)$ secondo i due assi dello spostamento dei punti della linea media e la rotazione $\varphi(x)$ della sezione. Le corrispondenti deformazioni generalizzate sono la deformazione assiale $\eta(x)$, la curvatura flessionale $\chi(x)$ e lo scorrimento medio $t(x)$.

Il contributo flessionale è in genere prevalente e le deformazioni assiali e taglianti possono essere trascurate nei suoi confronti, ponendo $\eta = t = 0$. L'energia Potenziale Totale della trave si scrive allora

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI \chi^2 dx + Pu(l) \quad 1.58$$

In tale espressione, l'ultimo termine definisce, a meno del segno, il lavoro del carico P , negativo se $u(l)$ è maggiore di zero; dal momento che la linea media non

varia di lunghezza, l'inflessione comporta in realtà un avvicinamento degli estremi e si avrà $u(l) < 0$ in soluzione.

La curvatura flessionale $\chi(x)$ è legata alla rotazione $\varphi(x)$ delle sezioni dalla relazione

$$\chi(x) = -\varphi'(x) \quad a1$$

dove un apice indica derivazione rispetto a x . Dal momento che la cerniera impone $u(0) = 0$, si può inoltre scrivere

$$u(l) = \int_0^l u'(x) dx \quad a2$$

Le (a) consentono di esprimere la (1.58) nella forma equivalente

$$V = \int_0^l \left(\frac{1}{2} EI \varphi'^2 + P u' \right) dx \quad 1.59$$

In aste assialmente inestensibili u e φ non sono tuttavia indipendenti. La Figura 1-6b mostra, ingrandito, un tratto infinitesimo della linea media: la sua lunghezza si mantiene inalterata nell'inflessione ($ds = dx$) e la proiezione sull'asse x è $dx + du$; per $t = 0$ l'inclinazione della linea media coincide inoltre con la rotazione φ della sezione. Dalla figura si evince allora la relazione $dx + du = dx \cos \varphi$, da cui consegue.

$$u' = \cos \varphi - 1 \quad 1.60$$

Si osservi che $\eta = 0$ non implica $u = 0$: un'inflessione inestensionale di entità non piccola comporta infatti spostamenti in entrambe le direzioni. Si può adesso esprimere il funzionale E.P.T. della trave nella forma

$$V(\varphi) = \int_0^l \left[\frac{1}{2} EI \varphi'^2 + P(1 - \cos \varphi) \right] dx \quad 1.61$$

Il suo dominio di definizione è l'insieme delle deformate congruenti, costituito dalle funzioni $\varphi(x)$ (continue) che rispettano le condizioni, appunto di congruenza, ai due estremi (nel caso di Figura 1-6a, è solo richiesta la continuità di φ).

All'interno di questo insieme, le funzioni che rendono stazionario il funzionale definiscono le configurazioni di equilibrio, fondamentale e non, della trave. Queste sono stabili se la variazione seconda dell'E.P.T. a partire da esse è definita positiva,

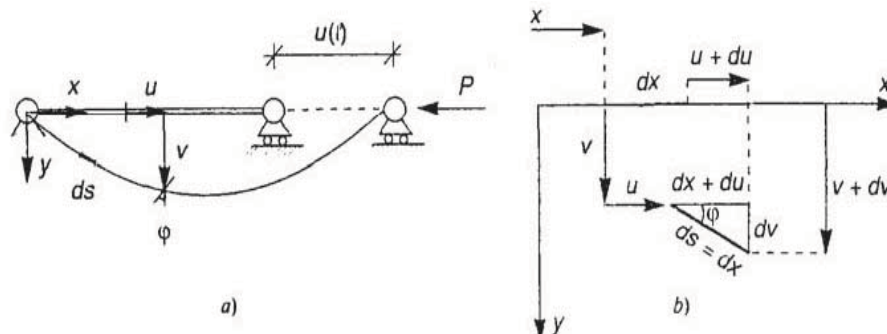


Figura 1-6

vale a dire maggiore di zero per ogni variazione congruente di configurazione. Le condizioni di stazionarietà del funzionale (1.61) si esplicitano tenendo presente che se il funzionale è della forma

$$V(U(x)) = \int_0^l f(x; U, U', U'') dx$$

esse si traducono nell'equazione differenziale

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial U''} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial U'} + \frac{\partial f}{\partial U} = 0 \quad 1.62$$

che rappresenta la cosiddetta Euleriana (o equazione di Eulero-Lagrange) del problema variazionale. Ai due estremi deve inoltre risultare

$$\left[\delta U \left(-\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial U''} + \frac{\partial f}{\partial U'} \right) \right]_0^l = 0 \quad \left[\delta U' \left(\frac{\partial f}{\partial U''} \right) \right]_0^l = 0 \quad 1.63$$

δU indica una variazione della funzione nel dominio di definizione del funzionale (congruente nel caso in esame). Laddove i vincoli richiedono $\delta U = 0$ o $\delta U' = 0$, si impongono le condizioni al contorno essenziali (di congruenza), che definiscono la classe funzionale in cui si opera. Se però le variazioni sono arbitrarie, devono annullarsi i termini a fattore, che stabiliscono le condizioni al contorno naturali (di equilibrio). Con riferimento al funzionale (1.61), dalle (1.62) e (1.63) si ottiene

$$EI\varphi'' + P \sin \varphi = 0, \quad \varphi'(0) = \varphi'(l) = 0 \quad 1.64$$

È questo il problema affrontato da Eulero nelle sue indagini sulle lamine compresse, da cui hanno avuto inizio gli studi di instabilità strutturale. La sua soluzione generale non è immediata, ma è facile constatare che esso ammette sempre la soluzione banale $\varphi_0(x) = 0$. È questa la configurazione di equilibrio fondamentale della trave, rettilinea e, nell'ipotesi di inestensibilità assiale indeformata. Vincoli diversi da quelli in Figura 1-6a comportano solo la modifica delle condizioni al contorno (1.64), che in travi compresse si mantengono comunque omogenee: il problema è quindi sempre soddisfatto dalla soluzione banale.

Si costruisce ora la variazione dell'E.P.T. dalla configurazione fondamentale. Essendo questa indeformata, la variazione del funzionale si identifica col funzionale stesso in cui la variazione $\delta\varphi$ sostituisce la generica φ . Precisamente

$$\Delta V(\varphi_0 = 0, \varphi = \delta\varphi) = V(\delta\varphi) = \int_0^l \left[\frac{1}{2} EI \delta\varphi'^2 - P(1 - \cos \delta\varphi) \right] dx \quad 1.65$$

Onde esplicitare la variazione seconda, la (1.65) viene sviluppata in serie di potenze. Ciò richiederebbe il calcolo delle derivate di Frechet di ΔV . Sotto condizioni di fatto sempre verificate in problemi di Meccanica delle Strutture, l'operazione tuttavia si traduce nella semplice sostituzione dell'integrando con il suo sviluppo in serie di Taylor attorno a $\delta\varphi = 0$.

Nel caso in esame, si pone $\cos \delta\varphi = 1 - \delta\varphi^2/2 + \delta\varphi^4/4! - \dots$ e si ottiene

$$\Delta V = \frac{1}{2} \delta^2 V + \frac{1}{4!} \delta^4 V + \dots = \frac{1}{2} \int_0^l [EI \delta\varphi'^2 - P \delta\varphi^2] dx + \frac{1}{24} \int_0^l P \delta\varphi^4 dx + \dots \quad 1.66$$

La configurazione fondamentale è quindi di equilibrio stabile se risulta

$$\frac{1}{2} \delta^2 V(0, \delta\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^l [EI \delta\varphi'^2 - P \delta\varphi^2] dx > 0 \quad \forall \delta\varphi \text{ congruenti} \quad 1.67$$

La trave compressa è assialmente inestensibile costituisce pertanto un problema Euleriano di instabilità: la sua configurazione fondamentale è infatti indeformata e la variazione seconda dell'E.P.T. a partire da essa è funzione lineare del carico. In alternativa alla rotazione $\varphi(x)$ delle sezioni, la configurazione della trave può essere rappresentata dallo spostamento trasversale $v(x)$ della linea media. Dalla Figura 1-6b si evince $dv = dx \sin \varphi$. È quindi

$$\varphi' = \frac{d}{dx}(\arcsin v') = \frac{v''}{\sqrt{1-v'^2}} \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - v'^2} \quad 1.68$$

che con il funzionale (1.61) diviene

$$V(v) = \int_0^l \left[\frac{1}{2} EI \frac{v''^2}{1-v'^2} - P \left(1 - \sqrt{1-v'^2} \right) \right] dx \quad 1.69$$

Esso è definito nell'insieme delle funzioni $v(x)$ continue con la derivata prima e rispettose delle condizioni di congruenza al contorno, (nel caso di Figura 1-6a, $v(0) = 0, v(l) = 0$). Il problema differenziale che consegue dalle (1.62) è piuttosto complesso e non viene riportato. È peraltro intuibile che esso è soddisfatto dalla soluzione banale $v_0(x) = 0$, sempre rappresentativa della configurazione fondamentale. La variazione dell'E.P.T. da essa si ottiene quindi sostituendo nella (1.69a) la funzione $v(x)$ con la sua variazione $\delta v(x)$. I contributi di ordine successivo si esplicitano ancora sviluppando in serie di Taylor le funzioni al suo interno. Dalle relazioni

$$\frac{1}{1-\delta v'^2} = 1 + \delta v'^2 + \dots \quad \sqrt{1-\delta v'^2} = 1 - \frac{1}{2} \delta v'^2 - \frac{1}{8} \delta v'^4 + \dots \quad 1.70$$

si ottiene l'espressione, corretta al quarto ordine

$$\begin{aligned} \Delta V(0, \delta v) &= \frac{1}{2} \delta^2 V + \frac{1}{4!} \delta^4 V + \dots \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l (EI \delta v''^2 - P \delta v'^2) dx \\ &\quad + \int_0^l \left(\frac{1}{2} EI \delta v'^2 \delta v''^2 - \frac{1}{8} P \delta v'^4 \right) dx + \dots \end{aligned} \quad 1.71$$

La configurazione fondamentale è di equilibrio stabile se risulta

$$\frac{1}{2} \delta^2 V(0, \delta v) = \frac{1}{2} \int_0^l (EI \delta v''^2 - P \delta v'^2) dx > 0 \quad \forall \delta v \text{ congruenti} \quad 1.72$$

Si osservi che la (1.70) definisce la curvatura flessionale come $\chi(x) = -d\varphi/dx = -v''/\sqrt{1-v'^2}$, in luogo della più usuale relazione $\chi(s) = -d\varphi/ds = -v''/\sqrt{(1-v'^2)^3}$. La differenza è semplicemente dovuta al diverso riferimento: x rappresenta l'asse della trave indeformata, mentre s è una coordinata curvilinea che segue l'asse nell'inflessione.

Ci si limita qui a osservare che per $v'^2 \ll 1$ entrambe le espressioni si riconducono alla forma linearizzata $\chi = -v''$. Ai fini del calcolo del carico critico, si opera con riferimento a un'approssimazione al secondo ordine del funzionale E.P.T. troncando lo sviluppo in serie di potenze della (1.61) ai termini quadratici, si ottiene

$$V_2(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^l [EI\varphi'^2 - P\varphi^2] dx \quad 1.73$$

Si osservi che l'espressione di $V_2(\varphi)$ è identica a quella della variazione seconda $\frac{1}{2}\delta^2 V(0, \varphi = \delta\varphi)$ come del resto nei sistemi discreti la cui configurazione fondamentale è indeformata.

Per $t = 0$, la rotazione della sezione coincide con quella della linea media che, se piccola, si identifica con la derivata della linea elastica. Ponendo $\varphi = v'$ nella (1.73) questa diviene

$$V_2(v) = \frac{1}{2} \int_0^l [EIv''^2 - Pv'^2] dx \quad (d2)$$

Questa espressione è stata calcolata per una trave di sezione costante e uniformemente compressa da un carico P a un suo estremo. L'eventuale dipendenza da x delle proprietà della sezione non richiede tuttavia modifiche. Se i carichi inducono nella configurazione fondamentale un'azione assiale variabile $N^0(x)$, positiva se di trazione, si scrive invece

$$V_2(v) = \frac{1}{2} \int_0^l [EIv''^2 - N^0v'^2] dx \quad 1.74$$

Imponendo la stazionarietà del funzionale si ottiene l'equazione differenziale

$$(EIv'')'' - (N^0v') = 0 \quad 1.75$$

e condizioni al contorno da selezionarsi tra le alternative seguenti

$$v = 0 \text{ oppure } (EIv'')' - N^0v' = 0 \quad v' = 0 \text{ oppure } EIv'' = 0 \quad 1.76$$

È questo un problema omogeneo, le cui soluzioni non banali definiscono le configurazioni di equilibrio della trave.

Se la deformabilità assiale venisse esplicitamente considerata, la (1.74) andrebbe sostituita dall'espressione

$$V_2 = \int_0^l \left(\frac{1}{2} EAu'^2 - nu \right) dx - H_L u(l) + \frac{1}{2} \int_0^l (EIv''^2 - N^0v'^2) dx \quad 1.77$$

dove $\eta(x)$ indica un carico assiale distribuito e H_L un'eventuale forza all'estremità (entrambi positivi se di verso concorde con quello di u). Il funzionale dipende adesso da due funzioni le cui variazioni sono indipendenti. Le (1.62) e (1.63) si scrivono quindi due volte, identificando U successivamente con u e v . La stazionarietà della (1.77) rispetto a u riconduce al problema

$$(EAu')' + n = 0 \quad u(0) = 0 \quad EAu'|_{x=l} = H_L \quad 1.78$$

che governa la configurazione fondamentale. Imponendo che il funzionale sia stazionario rispetto a v , si riottengono le (1.75) e (1.76). I problemi assiale e tensionale possono essere affrontati in sequenza: la soluzione delle (1.78) fornisce il valore $N^0 = EAu'_0$ da inserire nelle (1.75) e (1.76). Se come spesso accade, l'asta è isostatica nei confronti dell'azione assiale, N^0 può essere calcolato col solo equilibrio, senza la necessità di risolvere preventivamente le (1.78). La componente di

spostamento u può allora essere ignorata, considerando l'asta assialmente indeformabile, ipotesi assunta alla base della trattazione ogniqualevolta possibile.

1.5.2 Il carico critico di aste compresse

Come per ogni problema Euleriano, il carico critico di un'asta compressa può essere calcolato sia col metodo energetico che con quello statico. Il primo identifica il limite di stabilità con il valore del carico per cui la disuguaglianza (1.67) cessa di essere verificata. Le condizioni per la definizione positiva di un funzionale quadratico potrebbero essere utilizzate a questo scopo. Si rivela però preferibile ricorrere al metodo statico.

Questo ricerca il più piccolo valore del carico per cui l'equilibrio sussiste anche in configurazioni adiacenti a quella banale. In generale, il problema si formula imponendo l'equilibrio della trave in una configurazione inflessa, nella quale i carichi assiali contribuiscono al momento flettente.

Lo spostamento è però considerato sufficientemente piccolo da legittimare la linearizzazione del legame tra curvatura e linea elastica, utilizzato nella forma $\chi = -v''$. Le equazioni dell'equilibrio variato possono alternativamente essere scritte imponendo la stazionarietà del funzionale (1.74), che approssima al secondo ordine l'espressione dell'E.P.T.

Esse si riconducono allora alle (1.75) e (1.76), relativa cioè a travi prive di azioni trasversali sia distribuite che al contorno (in luogo dell'azione assiale N^0 , compariva la componente in direzione x dell'azione interna, indicata con H : essendo N^0 diretto secondo x , le due quantità peraltro si identificano.

La stazionarietà dell'E.P.T. approssimata al secondo ordine si rivela equivalente all'imposizione diretta dell'equilibrio in configurazioni inflesse, ma adiacenti a quella banale. Le seconde tra le alternative (1.76) definiscono le condizioni di equilibrio al contorno. Esse impongono che le quantità

$$M = -EIv'' \quad V = -(EIv'')' + N^0v' \quad 1.79$$

siano nulle agli estremi in assenza di vincoli che le forniscano come reazioni. M è il momento flettente, mentre V rappresenta la componente trasversale dell'azione interna; questa non coincide col taglio, diretto ortogonalmente all'asse deformato, che veniva espresso con $V = -(EIv'')'$.

1.5.3 Aste uniformemente compresse di sezione costante

1.5.3.1 I casi fondamentali

Particolare interesse rivestono aste di sezione costante e caricate a un solo estremo ($EI = cost$; $N^0 = -P = cost$). Il problema (1.75) si scrive allora

$$\begin{aligned} EIv'''' + Pv'' &= 0 \\ v &= 0 \text{ oppure } EIv'''' + Pv' = 0 \\ v' &= 0 \text{ oppure } EIv'' = 0; (x = 0, l) \end{aligned} \quad 1.80$$

La posizione

$$\alpha^2 = \frac{P}{EI} \quad 1.81$$

riconduce le (1.80) alla forma

$$\begin{aligned}
 v''''(x) + \alpha^2 v''(x) &= 0 \\
 v &= 0 \text{ oppure } v''' + \alpha^2 v' = 0; \\
 v' &= 0 \text{ oppure } v'' = 0; (x = 0, l)
 \end{aligned}
 \tag{1.82}$$

La (1.82a) è un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti, il cui integrale generale si scrive

$$v(x) = A_1 \cos \alpha x + A_2 \sin \alpha x + A_3 \frac{x}{l} + A_4 \tag{1.83}$$

(si osservi che α ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza: αx è quindi adimensionale). Imponendo le condizioni al contorno del problema, si ottengono quattro equazioni omogenee nelle costanti di integrazione. La soluzione $A_i = 0$ identifica la configurazione banale $v(x) = 0$. Sono peraltro di interesse le soluzioni non banali, in particolare i valori del carico per cui esse sono possibili, il più piccolo dei quali è il carico critico. Per l'asta doppiamente incernierata di Figura 1-7a le condizioni al contorno sono a entrambi gli estremi $v = 0$ e $v'' = 0$ e comportano

$$\begin{aligned}
 v(0) = A_1 + A_4 &= 0; \quad v(l) = A_1 \cos \alpha l + A_2 \sin \alpha l + A_3 + A_4 = 0 \\
 v''(0) = -\alpha^2 A_1 &= 0; \quad v''(l) = -\alpha^2 (A_1 \cos \alpha l + A_2 \sin \alpha l) = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.84}$$

Esse possono essere organizzate nella forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \cos \alpha l & \sin \alpha l & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha l & \sin \alpha l & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \tag{1.85}$$

Nello scrivere la (1.85) si è escluso il caso $\alpha^2 = 0$, che configura un'asta scarica. Soluzioni non banali esistono quando la matrice dei coefficienti è singolare. Eguagliando a zero il suo determinante, si ottiene l'equazione

$$\sin \alpha l = 0 \tag{1.86}$$

verificata da ogni αl multiplo di π , in corrispondenza cioè dei valori

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{l} \quad \alpha_2 = 2 \frac{\pi}{l} \quad \dots \quad \alpha_n = n \frac{\pi}{l} \tag{1.87}$$

A ognuno di essi, la (1.81) associa i carichi

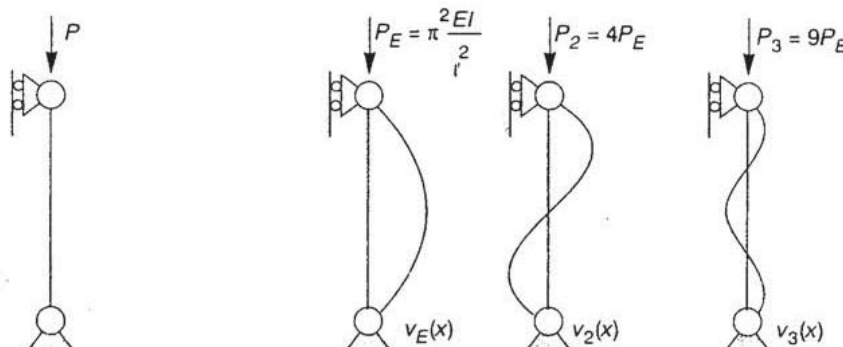


Figura 1-7

$$P_1 = \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad P_2 = 4\pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad \dots \quad P_n = n^2 \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad 1.88$$

Quando α assume uno dei valori (1.86) il sistema (1.85) ammette la soluzione $A_1 = A_3 = A_4 = 0$ e $A_2 = \Delta$ qualunque. Sostituendo nella (1.83), si ottiene

$$v_1(x) = \Delta \sin \frac{\pi x}{l} \quad v_2(x) = \Delta \sin \frac{2\pi x}{l} \quad v_n(x) = \Delta \sin \frac{n\pi x}{l} \quad 1.89$$

Ognuna di queste configurazioni inflesse è in equilibrio sotto il relativo carico P_n (Figura 1-7b). In particolare, per $n = 1$ le (1.88 e 1.89) forniscono il carico critico e la deformata critica dell'asta. Risulta

$$P_E = \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad v_E(x) = \Delta \sin \frac{\pi x}{l} \quad 1.90$$

In modo analogo si opera per altre condizioni di vincolo. Per la mensola in Figura 1-8 si ottiene

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{2l} \quad P_n = n^2 \pi^2 \frac{EI}{4l^2} \quad v_n(x) = \Delta \left(1 - \cos \frac{n\pi x}{2l}\right) \quad n \text{ dispari} \quad 1.91$$

e quindi

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \quad v_E(x) = \Delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right) \quad 1.92$$

Il caso $\alpha = 0$ non viene considerato perché privo di interesse, essendo evidente che un'asta scarica, se vincolata in modo da escludere atti di moto rigido, non ha altra configurazione di equilibrio che quella rettilinea. Nondimeno, $\alpha = 0$ risulta spesso il più piccolo valore che rende singolare la matrice dei coefficienti del sistema. La contraddizione è solo apparente e viene rimossa osservando che per questo valore il procedimento non è applicabile nella forma qui presentata: l'equazione differenziale diviene infatti $v'''' = 0$ e il suo integrale generale si scrive

$$v(x) = A_1 \frac{x^3}{l^3} + A_2 \frac{x^2}{l^2} + A_3 \frac{x}{l} + A_4 \quad 1.93$$

risultato che non si ritrova ponendo $\alpha = 0$ nella (1.83). Si potrebbe verificare che, quali che siano le condizioni al contorno, le sole soluzioni non banali della (1.93) sono moti rigidi, impediti dai vincoli se non nel caso di labilità. Un'asta labile ha ovviamente carico critico nullo, in quanto i possibili atti di moto rigido possono essere riguardati come deformate critiche. In caso di trazione ($P < 0$), α risulterebbe immaginario.

I primi due termini nella (1.83) possono allora essere tradotti in funzioni esponenziali ed è facile verificare che il problema ammette solo la soluzione banale. Anche in questo caso il risultato è ovvio dal punto di vista fisico e una trattazione analitica appare del tutto superflua.

Gli esempi sviluppati suggeriscono che il carico critico di un'asta di sezione costante può sempre scriversi nella forma

$$P_E = x \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad 1.94$$

dove

$$x = \left(\frac{\alpha_1 l}{\pi} \right)^2$$

1.95

è un coefficiente adimensionale che riflette l'influenza dei vincoli (α_1 è la più piccola radice dell'equazione che si ottiene eguagliando a zero il determinante della matrice del sistema omogeneo risolvibile). x assume valore unitario per l'asta doppiamente incernierata.

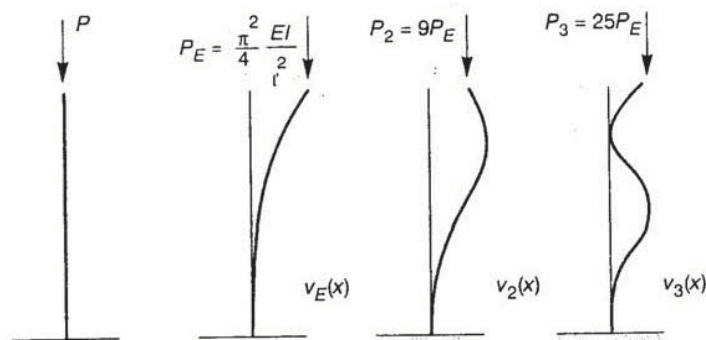


Figura 1-8

L'integrale generale (1.83) vale per ogni asta di sezione costante (i vincoli intervengono solo sulle condizioni al contorno e quindi sui valori delle costanti A_i). Le configurazioni di equilibrio inflesse, in particolare la deformata critica, sono allora costituite da una porzione di senoide, eventualmente traslata e/o ruotata. La Figura 1-9 illustra i tratti di senoide interessati dalle deformate critiche di aste diversamente vincolate; i casi a, b e c si riferiscono alle soluzioni fornite in precedenza.

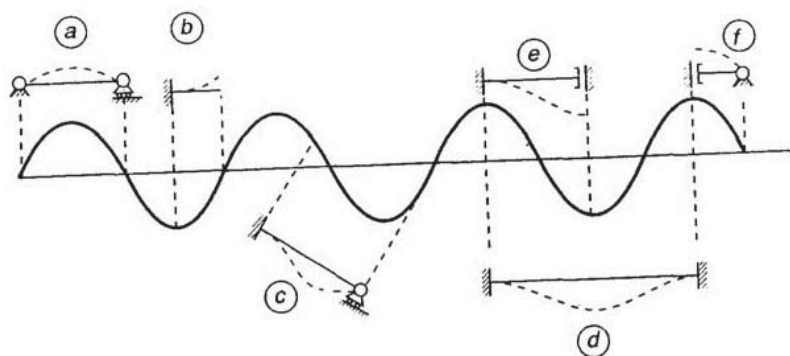


Figura 1-9

Il grafico mostra che le diverse condizioni di vincolo possono tutte essere ricondotte a un unico caso, convenzionalmente identificato con l'asta incernierata a entrambi gli estremi. Occorre a tal fine sostituire la lunghezza dell'asta con il valore l_0 relativo a questo caso, che definisce la lunghezza libera di inflessione. l_0 rappresenta la distanza tra due successivi punti di flesso nella deformata critica, dove curvature e momenti si annullano: il tratto può essere considerato come un'asta doppiamente incernierata che presenta, nei confronti dell'instabilità, lo stesso comportamento di quella effettiva (per evidenziare due punti di flesso è a volte necessario prolungare la senoide oltre gli estremi dell'asta). Il carico critico è fornito dalla (1.92) in cui l_0 sostituisce l , e si scrive

$$P_E = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2} \quad 1.96$$

Il confronto tra le (1.94) e (1.96) stabilisce la relazione

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{x}} \quad 1.97$$

I valori di l_0 e x per i vari casi di vincoli perfetti sono riportati in Tabella 1-1, unitamente alle condizioni al contorno relative a ognuno di essi e alle espressioni delle deformate critiche che ne conseguono. È spesso conveniente riferire il carico critico all'unità di sezione trasversale, ponendo $\sigma_E = P_E/A$. Per le (1.94 e 1.96) si può allora scrivere

$$\sigma_E = \frac{P_E}{A} = \pi^2 E \frac{x}{l} \frac{I}{A} = \pi^2 E \frac{\varrho^2}{l_0^2} \quad \text{con} \quad \varrho = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad 1.98$$

dove ϱ è il raggio d'inerzia della sezione. La posizione

$$\lambda = \frac{l_0}{\varrho} = \frac{l}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{A}{I}} \quad 1.99$$

permette di scrivere la (1.98) come segue

$$\sigma_E = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} \quad 1.100$$

La grandezza (1.99), detta snellezza, riassume in forma adimensionale le caratteristiche geometriche (proprietà della sezione, lunghezza, condizioni di vincolo) che governano il comportamento dell'asta nei confronti dell'instabilità. Il carico critico risulta inversamente proporzionale a λ^2 , quindi tanto più piccolo quanto più l'asta è snella.






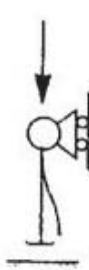
Caso	Condizioni al contorno $x = 0$	Condizioni al contorno $x = \ell$	ℓ_0/ℓ
(a) 	$v = 0$ $v'' = 0$	$v = 0$ $v'' = 0$	1.0
(b) 	$v = 0$ $v' = 0$	$v'' = 0$ $v''' + \alpha^2 v' = 0$	2.0
(c) 	$v = 0$ $v' = 0$	$v = 0$ $v'' = 0$	0.699
(d) 	$v = 0$ $v' = 0$	$v = 0$ $v' = 0$	0.5
(e) 	$v' = 0$ $v''' = 0$	$v = 0$ $v' = 0$	1.0
(f) 	$v' = 0$ $v''' = 0$	$v = 0$ $v'' = 0$	2.0

Tabella 1-1

2 Il collasso per instabilità

2.1 Influenza del comportamento post-critico

2.1.1 I comportamenti fondamentali

L'instabilità di sistemi Euleriani avviene per biforcazione dalla configurazione fondamentale. Questa è caratterizzata da piccoli spostamenti e l'approccio del secondo ordine consente sia di calcolarla correttamente che di identificare i valori del carico per cui da essa dipartono configurazioni di equilibrio adiacenti, il più piccolo dei quali è il carico critico.

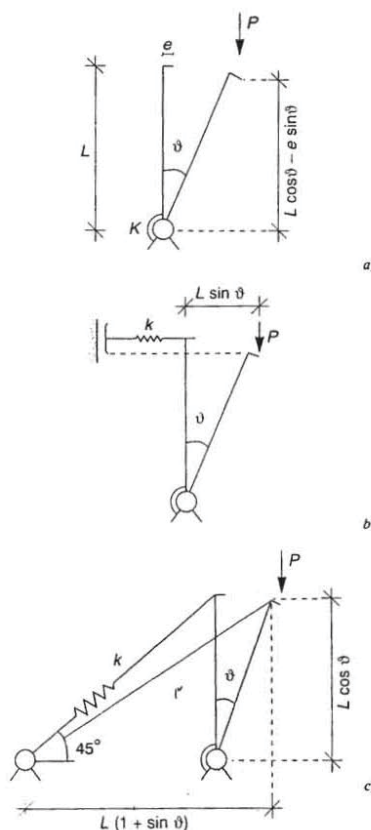


Figura 2-1

L'approccio non è però in grado di seguire l'evoluzione dei percorsi diramati, che una struttura reale, inevitabilmente sede di imperfezioni, avvicina in fase post-critica. Esso individua solo la parte del primo ordine degli spostamenti e si limita a stabilire che, comunque piccole siano le imperfezioni, questa diviene illimitata per $P \rightarrow P_E$. Gli spostamenti, di cui la teoria non è in grado di valutare l'entità, non sono allora confondibili con la loro parte del primo ordine.

È questo uno dei motivi per cui il carico P_E viene denominato "critico", assumendo implicitamente che tali spostamenti siano intollerabili. L'informazione è tuttavia troppo generica per permettere di correlare l'effettiva capacità portante della struttura con il carico critico teorico.

Questo può a volte essere raggiunto e anche superato in misura non marginale, al prezzo di spostamenti accettabili quantomeno in situazioni estreme. Di converso, può accadere che il carico critico non possa neppure venire avvicinato, in quanto la curva rappresentativa della risposta della struttura reale raggiunge un punto di massimo sotto valori sensibilmente inferiori. La teoria del secondo ordine non fornisce

indicazioni in proposito e deve essere integrata da uno studio del comportamento post-critico della struttura.

Per chiarire queste affermazioni, si considerano i tre sistemi a un grado di libertà Figura 2-1. Il carico, che si mantiene verticale, presenta un'eccentricità, rappresentativa di una generica imperfezione, misurata dal parametro adimensionale

$$\zeta = \frac{e}{L} \quad 2.1$$

I carichi critici delle tre aste risultano, come si constata con semplici calcoli

$$P_{Ea} = \frac{K}{L} \quad P_{Eb} = kL \quad P_{Ec} = \frac{1}{2}kL \quad 2.2$$

Operando senza ipotesi restrittive sull'entità degli spostamenti, si ottengono per l'E.P.T. dei tre problemi le espressioni

$$V_a(\vartheta) = \frac{1}{2}k\vartheta^2 - PL(1 - \cos \vartheta + \zeta \sin \vartheta) \quad 2.3$$

$$V_b(\vartheta) = \frac{1}{2}kL^2 \sin^2 \vartheta - PL(1 - \cos \vartheta + \zeta \sin \vartheta) \quad 2.4$$

$$V_c(\vartheta) = \frac{1}{2}kL^2(\sqrt{1 + \sin \vartheta} - 1)^2 - PL(1 - \cos \vartheta + \zeta \sin \vartheta) \quad 2.5$$

Le equazioni di equilibrio si scrivono imponendo $dV/d\vartheta = 0$. Ricordando le espressioni (2.2) dei tre carichi critici e risolvendo per P, si ottiene

$$Asta(a) = \frac{PL}{K} = \frac{P}{P_{Ea}} = \frac{\vartheta}{\sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta} \quad 2.6$$

$$Asta(b) = \frac{P}{kL} = \frac{P}{P_{Eb}} = \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{\sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta} \quad 2.7$$

$$Asta(c) = \frac{2P}{kL} = \frac{P}{P_{Ec}} = 2 \frac{\cos \vartheta - \sqrt{1 - \sin \vartheta}}{\sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta} \quad 2.8$$

Si supponga che le aste siano perfette. Per $\zeta = 0$, le (2.3-2.5) definiscono solo le soluzioni non banali dei problemi (esse sottintendono divisioni per quantità nulle nella configurazione banale).

Le equazioni di equilibrio sono comunque soddisfatte anche da $\vartheta = 0$ e le tre soluzioni sono illustrate a tratto pieno in Figura 2-2. Le biforcazioni si manifestano per $P = P_E$, quando la rigidezza delle molle è stata annullata dagli effetti geometrici. I percorsi diramati evolvono diversamente nei tre casi: l'asta (a) presenta una biforcazione simmetrica accompagnata da un recupero di rigidezza, in quanto nelle configurazioni non banali l'equilibrio sussiste sotto carichi crescenti (Figura 2-2 a); pure simmetrico, ma decrescente, è il comportamento post-critico dell'asta (b) (Figura 2-2 b); la biforcazione dell'asta (c) è invece asimmetrica, risultando decrescente per $\vartheta > 0$ e crescente per rotazioni negative (Figura 2-2c).

L'eccentricità del carico elimina le biforcazioni, sospingendo le aste verso uno dei percorsi diramati. Per $\zeta = 0.02$, le (2.6-2.8) sono diagrammate nelle curve tratteggiate in Figura 2-2 (nel terzo caso, asimmetrico, è anche indicata a tratto punto la risposta relativa a $\zeta = 0.02$). L'asta (a) può effettivamente raggiungere e in una certa misura superare il carico critico teorico, sia pure al prezzo di rotazioni notevoli.

L'asta (b) invece collassa sotto il carico corrispondente all'ordinata P_c del punto di

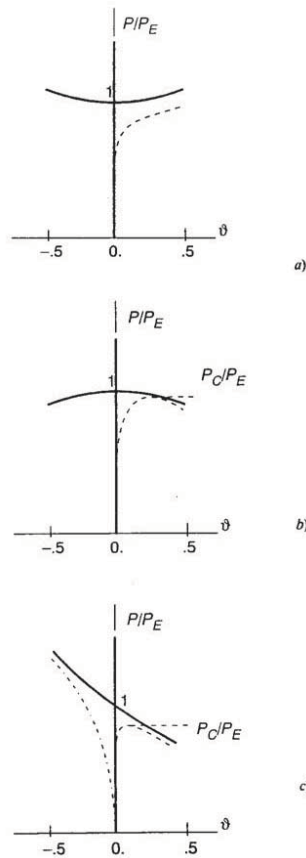


Figura 2-2

massimo della curva, inferiore a P_E . La risposta dell'asta (c) dipende dal segno dell'imperfezione; dal momento che questo non è in genere noto a priori, occorre peraltro considerare la situazione più sfavorevole: anche in questo caso il carico critico Euleriano rappresenta quindi solo un valore teorico, che la struttura non può di fatto raggiungere. È a questo punto evidente l'importanza di stabilire la natura crescente o decrescente del comportamento post-critico della struttura perfetta. È peraltro di regola sufficiente determinare l'andamento iniziale dei percorsi diramati, il che non richiede di operare, come sin qui fatto, senza imporre restrizioni all'entità degli spostamenti. Sviluppando in serie di Taylor attorno a $v = 0$ le espressioni (2.3-2.5) dell'E.P.T. delle tre aste; particolarizzate al caso $\zeta = 0$, si ottiene

$$V_a(v) = \frac{1}{2}(K - PL)v^2 + \frac{1}{24}PLv^4 - \frac{1}{720}PLv^6 + \dots \quad 2.9$$

$$V_b(v) = \frac{1}{2}(kL^2 - PL)v^2 - \frac{1}{24}(4kL^2 - PL)v^4 + \frac{1}{720}(16kL^2 - PL)v^6 + \dots \quad 2.10$$

$$V_c(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{kL^2}{2} - PL\right)v^2 - \frac{1}{8}kL^2v^3 - \frac{1}{24}\left(\frac{kL^2}{8} - PL\right)v^4 + \dots \quad 2.11$$

Essendo la configurazione $v = 0$ di equilibrio, gli sviluppi hanno inizio dal termine quadratico. Considerando nelle (2.9) termini di ordine via via più elevato, si ottengono informazioni sempre più dettagliate. Un troncamento al secondo ordine conserva solo il primo addendo ai secondi membri; il confronto con i valori (16.2) dei carichi critici mostra che in tutti e tre i casi si scrive

$$V(\vartheta) = V_2(\vartheta) = \frac{L}{2}(P_E - P)\vartheta^2 \quad 2.12$$

Operando con riferimento a questa espressione, l'equazione di equilibrio risulta

$$\frac{1}{L} \frac{dV_2}{d\vartheta} = (P_E - P)\vartheta \quad 2.13$$

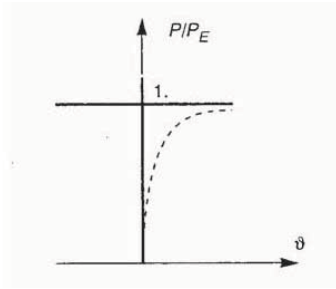
Essa ammette soluzioni non banali solo per $P_E = P$, prevedendo per questo valore una biforcazione orizzontale, che non fornisce indicazioni sul comportamento post-critico, neppure iniziale (Figura 16.3, linea piena).

È a questo proposito importante osservare che il percorso diramato della terza asta presenta una pendenza iniziale non nulla, in contrasto con quanto la (2.13) sembrerebbe a prima vista suggerire: l'approccio del secondo ordine non fornisce altra informazione che il carico critico del sistema. È quindi necessario conservare nelle (2.9 e 2.11) almeno un' termine ulteriore. Ricordando sempre le (2.2), si scrive nei tre casi

$$V_a(\vartheta) = L\left[\frac{1}{2}(P_{Ea} - P)\vartheta^2 + \frac{1}{24}P\vartheta^4\right] \quad 2.14$$

Figura 2-3

2.15



$$V_b(\vartheta) = L\left[\frac{1}{2}(P_{Eb} - P)\vartheta^2 - \frac{1}{24}(P_{Eb} - P)\vartheta^4\right] \quad 2.16$$

$$V_c(\vartheta) = L\left[\frac{1}{2}(P_{Ec} - P)\vartheta^2 - \frac{1}{4}P_{Ec}\vartheta^3\right]$$

(l'indice

indica l'ordine dei contributi sopravvissuti al troncamento). Nella fase iniziale dell'inflessione P varia poco rispetto al valore critico P_E : non è ovviamente legittimo ignorare la differenza nei termini del secondo ordine, che verrebbero ad annullarsi, ma in quelli successivi si può porre $P = P_E$, col che le (2.14 e 2.16) divengono

$$V_{4a}(\vartheta) = L\left[\frac{1}{2}(P_{Ea} - P)\vartheta^2 + \frac{1}{24}P_{Ea}\vartheta^4\right] \quad 2.17$$

$$V_b(\vartheta) = L\left[\frac{1}{2}(P_{Eb} - P)\vartheta^2 - \frac{1}{8}P_{Eb}\vartheta^4\right] \quad 2.18$$

$$V_c(\vartheta) = L\left[\frac{1}{2}(P_{Ec} - P)\vartheta^2 - \frac{1}{4}P_{Ec}\vartheta^3\right] \quad 2.19$$

Dalla

condizione di stazionarietà $dV/d\vartheta = 0$ si ottengono adesso le equazioni di equilibrio

$$\begin{aligned} & (P_{Ea} - P)\vartheta + \frac{1}{6}P_{Ea}\vartheta^3 \\ & = 0; \quad (P_{Eb} - P)\vartheta - \frac{1}{2}P_{Eb}\vartheta^3; \quad (P_{Ec} - P)\vartheta + \frac{3}{4}P_{Ec}\vartheta^2 \end{aligned} \quad 2.20$$

Esse ammettono, oltre a $\vartheta = 0$, le soluzioni non banali

$$\frac{P}{P_{Ea}} = 1 + \frac{1}{6}\vartheta^2; \quad \frac{P}{P_{Eb}} = 1 - \frac{1}{2}\vartheta^2; \quad \frac{P}{P_{Ec}} = 1 - \frac{3}{4}\vartheta^2 \quad 2.21$$

Queste relazioni definiscono gli andamenti iniziali dei percorsi diramati e ne colgono le proprietà essenziali. Il termine lineare in ϑ nella (2.21 c) riflette la natura asimmetrica della biforcazione, valutandone correttamente la pendenza iniziale. Tale termine non appare nelle espressioni relative alle prime due aste, che presentano entrambe un comportamento post-critico simmetrico; la sua natura crescente o decrescente è stabilita dal segno del coefficiente di ϑ^2 . Dal confronto tra i valori (2.21) e quelli esatti (2.6 e 2.8) (scritti per $\zeta = 0$) si evince che l'approssimazione è accurata fino a rotazioni notevoli; essendo stato trascurato nella (2.19) il contributo del quarto ordine, la (2.21 c) è ovviamente meno precisa, ma comporta pur sempre errori inferiori al 3% per $\|\vartheta\| < 0.5$ radianti.

2.1.2 Valutazione del comportamento post-critico iniziale

2.1.2.1 Sistemi a più gradi di libertà e strutture continue

Il procedimento seguito per sistemi a un grado di libertà non è direttamente estendibile a situazioni più generali. Se l'espressione dell'E.P.T. include termini di ordine superiore al secondo, le condizioni di equilibrio che ne conseguono per stazionarietà sono infatti equazioni differenziali (per strutture continue) o un sistema di equazioni algebriche (per sistemi discreti) nonlineari e la ricerca delle loro soluzioni diviene problematica. È però spesso possibile introdurre ipotesi che riconducono la formulazione al caso precedente. Le configurazioni della struttura verranno indicate con U ; il simbolo può sottintendere una o più funzioni rappresentative delle deformate congruenti di un sistema continuo o indicare il vettore che raccoglie le coordinate Lagrangiane di uno discreto. Sia U_0 la configurazione fondamentale della struttura perfetta, calcolabile in piccoli spostamenti e che si suppone nota, e δU una generica variazione congruente da essa. Sviluppando il funzionale (o la funzione) E.P.T. attorno a U_0 si ottiene

$$\Delta V(U_0, U_0 + \delta U) = \frac{1}{2}\delta^2 U + \frac{1}{3!}\delta^3 U + \frac{1}{4!}\delta^4 U + \dots \quad 2.22$$

Essendo U_0 configurazione di equilibrio, la variazione prima è infatti nulla. I termini esplicitamente considerati nella (2.22) sono rispettivamente quadratico, cubico e del quarto ordine nella variazione δU . In sistemi discreti, i diversi contributi nella (2.22) si esplicitano sviluppando $V(U)$ in serie di Taylor attorno alla configurazione fondamentale.

In problemi continui, occorrerebbe a rigore calcolare le successive derivate di Frechet del funzionale; in tutti i problemi di meccanica delle strutture, il procedimento si traduce tuttavia nella semplice sostituzione delle funzioni al suo interno con il loro sviluppo in serie di Taylor. Al secondo ordine si pone $\Delta V = \frac{1}{2}\delta^2 V$; la condizione $\delta(\Delta V) = 0$ si traduce allora nel problema lineare di autovalori che definisce il carico critico Euleriano P_E del sistema e la corrispondente deformata critica U_E , senza fornire informazioni sul comportamento post-critico. Lo sviluppo (2.22) deve quindi considerare almeno un termine ulteriore e le condizioni di stazionarietà configurano un problema nonlineare. All'inizio della sua evoluzione post-critica, la struttura tuttavia si deforma secondo U_E e appare legittimo ipotizzare che, quantomeno in una

fase iniziale, si limiti a amplificare questo modo deformativo senza alterarne significativamente la forma. Si assume allora

$$\delta U = \vartheta U_E \quad 2.23$$

L'ipotesi riconduce la struttura a un unico grado di libertà, governandone la risposta post-critica mediante il solo parametro ϑ . Introducendo la (2.23), l'espressione (2.22) di ΔV diviene

$$\frac{1}{x} \Delta V(U_0, U_0 + \delta U_E) = \frac{1}{2} (1 - \mu) \vartheta^2 + \frac{1}{3} a \vartheta^3 + \frac{1}{4} b \vartheta^4 + \dots = \frac{1}{x} \Delta V(0, \vartheta) \quad 2.24$$

dove si è posto

$$a = \frac{1}{x} \frac{1}{2\vartheta^3} \delta^3 V(U_0, U_0 + \delta U_E)|_{\mu=1} ; \quad b = \frac{1}{x} \frac{1}{6\vartheta^4} \delta^4 V(U_0, U_0 + \delta U_E)|_{\mu=1} \quad 2.25$$

Nelle (2.24-2.25), $\mu = P/P_E$ e x è la costante positiva che riconduce la variazione seconda alla forma indicata. Esse non definiscono il valore dell'E.P.T., ma la sua variazione dalla configurazione fondamentale U_0 . Considerando, nello sviluppo in serie di Taylor il solo contributo lineare, in luogo della (2.24) si scrive

$$\frac{1}{x} V(U_0 + \delta U_E) = -\mu \zeta \vartheta + \frac{1}{2} (1 - \mu) \vartheta^2 + \frac{1}{3} a \vartheta^3 + \frac{1}{4} b \vartheta^4 \quad 2.26$$

dove ζ è il parametro rappresentativo dell'imperfezione. Per piccoli $|\vartheta|$, la risposta della struttura reale è ancora descritta da

$$\mu \zeta = (1 - \mu) \vartheta + \begin{cases} a \vartheta^2 \\ a \vartheta^3 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{se } a \neq 0 \\ \text{se } a = 0 \end{matrix} \quad 2.27$$

Il problema è stato ricondotto a un unico grado di libertà dall'ipotesi (2.23), che assume che lungo i percorsi diramati la struttura amplifichi il modo critico senza alterarne la forma. L'ipotesi è in genere ragionevole in una fase iniziale dell'evoluzione post-critica, ma solo se il modo critico è unico. Se il carico critico corrisponde a più autovalori coincidenti, o se esistono più autovalori prossimi al minimo, le relative autofunzioni interagiscono in fase post-critica, dando luogo a comportamenti sostanzialmente diversi da quelli che si prevederebbero considerandole individualmente. In particolare, modi biforcativi crescenti possono combinarsi dando luogo a percorsi decrescenti. Al problema si accennerà prima di concludere il capitolo.

Sono questi, a grandi linee, i concetti su cui si fonda la teoria asintotica per lo studio del comportamento post-critico iniziale di strutture elastiche, uno dei risultati più significativi ottenuti dalla meccanica delle strutture nel ventesimo secolo. La teoria è stata originariamente sviluppata da Koiter nella sua tesi di dottorato ed è comunemente associata al suo nome.

Un'approssimazione al quarto ordine per ΔV determina correttamente la pendenza e la curvatura dei percorsi diramati di strutture perfette nel punto di biforcazione. In presenza di imperfezioni, la teoria è asintoticamente esalta, nel senso che le ipotesi semplificative su cui si basa sono rigorosamente legittime per $\zeta \rightarrow 0$. Per ζ finiti esse comportano delle approssimazioni, peraltro accettabili se l'entità di ζ commisura

imperfezioni che si riscontrano in situazioni reali. Successivi raffinamenti hanno introdotto termini correttivi, senza modificare gli aspetti essenziali della teoria.

2.1.3 Valutazione della capacità portante di strutture reali

Le (2.27) governano la risposta elastica di una struttura reale (sede di imperfezioni) nell'intorno della configurazione fondamentale u_0 e possono essere utilizzate per valutarne la capacità portante. È a questo fine necessario distinguere due tipi di comportamento, che dettano all'analisi due diversi obbiettivi.

Se si verifica l'alternativa di biforcazione simmetrica crescente ($a = 0; b > 0$), la struttura perfetta ha un comportamento post-critico crescente e, per $|\vartheta|$ sufficientemente elevati, la (2.27) prevede $\mu > 1$, indicando che il carico critico teorico può essere in linea di principio superato. La (2.27) tuttavia sottintende un comportamento linearmente elastico e nessun materiale si mantiene tale oltre un certo livello deformativo. Anche se la struttura perfetta si comporta ancora elasticamente al raggiungimento del carico critico, avvicinando questo valore piccole imperfezioni causano spostamenti notevoli e le risorse elastiche del materiale fatalmente si esauriscono. Per stabilire la capacità portante della struttura, occorre per prima cosa valutare fino a quale valore del carico la soluzione elastica si mantiene valida.

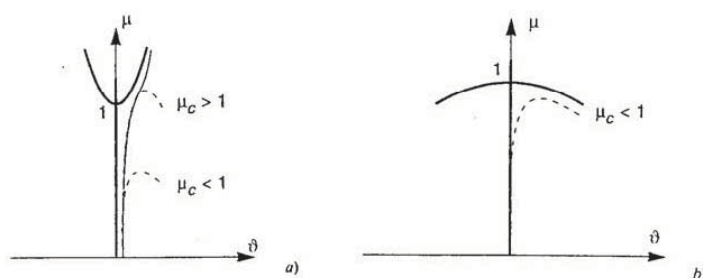


Figura 2-4

Raggiunta questa soglia la risposta cambia per effetto del mutato legame costitutivo e la struttura giunge a collasso sotto un valore del carico μ_c , che ne definisce l'effettiva capacità portante (Figura 2-4a). μ_c può risultare inferiore o superiore a uno, indicando che la struttura può raggiungere la situazione ultima per carichi inferiori al valore critico Euleriano, ma anche superare questo valore (al fine di questa indagine, si può spesso evitare il ricorso alla teoria asintotica). Se la struttura perfetta presenta invece un comportamento post-critico decrescente, la curva rappresentativa della risposta elastica del sistema reale raggiunge un massimo per un valore μ_c minore di uno (Figura 2-4b).

Si dice allora che il sistema è sensibile alle imperfezioni, in quanto la sua capacità portante, comunque inferiore al carico critico teorico, è tanto più ridotta quanto più queste sono elevate. Anche se la struttura si mantiene elastica durante tutta la sua evoluzione, il carico non può eccedere il valore μ_c e l'obiettivo primario dell'analisi è adesso la sua valutazione. Si vedrà che l'indagine si riconduce al calcolo dei coefficienti post-critici a e b . Si procede ora alla valutazione della capacità portante di alcune tipologie strutturali di particolare interesse.

2.2 Aste compresse

2.2.1 Curva di stabilità teorica

2.2.1.1 Effetti della non-linearità del comportamento sul carico critico

Il carico critico flessionale (per unità di area) di un'asta elastica compressa è espresso, in funzione della snellezza, dalla formula di Eulero e risulta tanto più elevato quanto meno l'asta è snella. La formula tuttavia presuppone un comportamento linearmente elastico e nessun materiale si mantiene tale oltre un certo livello di sforzo: raggiunto un limite di proporzionalità σ_p , si manifestano deviazioni dalla linearità e la curva uniassiale si presenta, ad esempio, come in Figura 2-5a. σ_0 indica il limite di resistenza del materiale, cui corrisponde la deformazione ε_0 . Ulteriori deformazioni a sforzo costante sono possibili in materiali duttili.

Per snellezze elevate, la formula di Eulero prevede $\sigma_E < \sigma_p$ e identifica il carico critico teorico dell'asta. La disequaglianza infatti stabilisce che, nella configurazione rettilinea, lo sforzo $\sigma = -P/A$ si mantiene al di sotto del limite di proporzionalità fino al raggi ungimento del carico critico; quando si manifesta l'inflessione, l'asta vi si oppone quindi con il modulo elastico iniziale E .

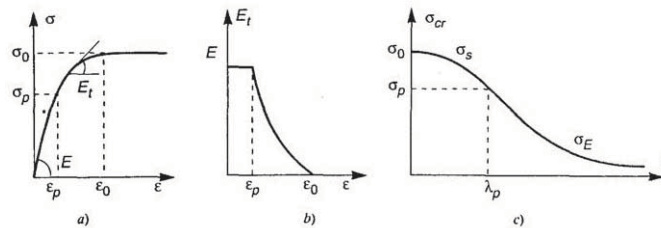


Figura 2-5

Se però risulta $\sigma_E > \sigma_p$, la formula di Eulero perde di validità e il calcolo del carico critico deve tener conto della non-linearità del comportamento. È evidente che per snellezze sufficientemente ridotte questa circostanza è destinata a verificarsi. Se, benché nonlineare, il comportamento si mantiene elastico, gli aspetti salienti del fenomeno restano inalterati. Solamente, alla perdita di rigidezza flessionale dovuta al carico ora si accompagna il deterioramento del modulo elastico, definito dalla pendenza locale della curva (o modulo tangente) $E_t = d\sigma/d\varepsilon$, funzione di ε e illustrato in Figura 2-5b. In quanto segue, si indicherà con E_t , il valore corrente del modulo elastico, uguale a E se $\varepsilon \leq \varepsilon_p = \sigma_p/E$ e nullo nel caso in esame per $\varepsilon \geq \varepsilon_p$. L'asta si mantenga rettilinea fino al limite di stabilità, quando l'equilibrio può instaurarsi anche in configurazioni adiacenti: nella configurazione rettilinea, l'asta è uniformemente sollecitata da $\sigma = P/A$, sforzo cui sono associati, attraverso la curva uniassiale, una deformazione ε e un modulo tangente E_t , pure uniformi. La rigidezza con cui essa si oppone inizialmente all'inflessione è allora proporzionale a $E_t I$ e l'instabilità si verifica quando il carico ha raggiunto intensità tale da annullarla.

$$\sigma_s = \pi^2 \frac{E_t \varepsilon_s}{\lambda^2} \quad 2.28$$

dove ε_s è la deformazione associata a σ_s nel legame uniassiale del materiale. Per $\varepsilon_s \leq \varepsilon_p$ è $E_t(\varepsilon_s) = E$ e la (2.28) si riconduce alla formula di Eulero. La condizione $\sigma_E = \sigma_p$ identifica per la snellezza il valore

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \quad 2.29$$

detto *snellezza di transizione*. Dipendendo solo dal modulo elastico iniziale E e dallimito di proporzionalità σ_p , essa è una proprietà del materiale. Indicando con σ_{cr} , il carico critico dell'asta, si scrive allora

$$\sigma_{cr}(\lambda) = \begin{cases} \sigma_E = \pi^2 E / \lambda^2 & \text{se } \lambda \geq \lambda_p \\ \sigma_S = \pi^2 E_t / \lambda^2 & \text{se } \lambda \leq \lambda_p \end{cases} \quad 2.30$$

Il risultato è riassunto nel grafico di Figura 2-5c, noto come *curva di stabilità*. Esso riporta il valore di σ_{cr} in funzione della snellezza e la sua ordinata, moltiplicata per l'area della sezione, definisce il carico critico teorico dell'asta. La snellezza di transizione (2.29) separa l'intervallo relativo alle *aste snelle* ($\lambda > \lambda_p$), per le quali l'instabilità teoricamente si innesca quando gli sforzi sono ancora in campo lineare, da quello delle *aste tozze* ($0 < \lambda < \lambda_p$), in cui prima dell'inflessione lo sforzo ha ecceduto il limite di proporzionalità. Per $\lambda \rightarrow 0$, σ_{cr} si identifica con il limite di resistenza del materiale σ_0 . La (2.28) è nota come *formula di Shanley*. Essa esprime il carico critico in forma implicita e il calcolo di σ_S non è sempre immediato. Una soluzione grafica si ottiene osservando che la (2.28) è funzione di ε attraverso il modulo tangente, che vi appare moltiplicato per π^2 / λ^2 . Scalando il grafico di $E_t(\varepsilon)$ per questo fattore e sovrapponendolo alla curva uniassiale del materiale, è allora facile trovare il punto di intersezione, la cui ordinata definisce σ_S .

3 Quadro normativo

Il quadro normativo di riferimento, è quello fornito dall'NTC 2008. Viene di seguito riportata una sintesi delle modalità di analisi e di verifica riguardanti le strutture costituite da assemblaggi di aste.

3.1 Costruzioni civili ed industriali

3.1.1 Costruzioni di acciaio

Il metodo di analisi deve essere coerente con le ipotesi di progetto. L'analisi deve essere basata su modelli strutturali di calcolo appropriati, a seconda dello stato limite considerato. Le ipotesi scelte ed il modello di calcolo adottato devono essere in grado di riprodurre il comportamento globale della struttura e quello locale delle sezioni adottate, degli elementi strutturali, dei collegamenti e degli appoggi. Nell'analisi globale della struttura, in quella dei sistemi di controvento e nel calcolo delle membrature si deve tener conto delle imperfezioni geometriche e strutturali di cui al 3.1.1.5

3.1.1.1 Classificazione delle sezioni

Le sezioni trasversali degli elementi strutturali si classificano in funzione della loro capacità rotazionale C_ϑ definita come:

$$C_\vartheta = \vartheta_r / \vartheta_y - 1 \quad 3.1$$

essendo ϑ_r e ϑ_y le curvature corrispondenti rispettivamente al raggiungimento della deformazione ultima ed allo snervamento. Si distinguono le seguenti classi di sezioni:

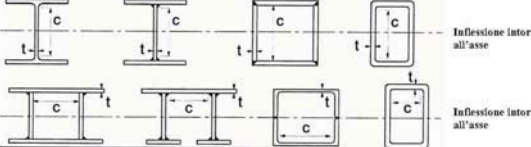
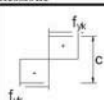
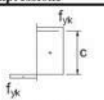
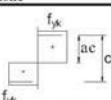
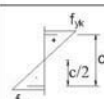
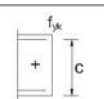
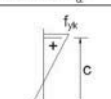
classe 1 quando la sezione è in grado di sviluppare una cerniera plastica avente la capacità rotazionale richiesta per l'analisi strutturale condotta con il metodo plastico di cui al § 3.1.1.2 senza subire riduzioni della resistenza. Possono generalmente classificarsi come tali le sezioni con capacità rotazionale $C_\vartheta \geq 3$

classe 2 quando la sezione è in grado di sviluppare il proprio momento resistente plastico, ma con capacità rotazionale limitata. Possono generalmente classificarsi come tali le sezioni con capacità rotazionale $C_\vartheta \geq 1,5$








classe 3 quando nella sezione le tensioni calcolate nelle fibre estreme compresse possono raggiungere la tensione di snervamento, ma l'instabilità locale impedisce lo sviluppo del momento resistente plastico;



classe 4 quando, per determinarne la resistenza flettente, tagliante o normale, è necessario tener conto degli effetti dell'instabilità locale in fase elastica nelle parti compresse che compongono la sezione. In tal caso nel calcolo della resistenza la sezione geometrica effettiva può sostituirsi con una *sezione efficace*.

Le sezioni di classe 1 e 2 si definiscono *compatte*, quelle di classe 3 *moderatamente snelle* e quelle di classe 4 *snelle*. Per i casi più comuni delle forme delle sezioni e delle modalità di sollecitazione, la seguente Tabella 3-1 fornisce indicazioni per la classificazione delle sezioni. La classe di una sezione composta corrisponde al valore di classe più alto tra quelli dei suoi elementi componenti.

					
Parti interne compresse					
Classe	Parte soggetta a flessione	Parte soggetta a compressione	Parte soggetta a flessione e a compressione		
Distribuzione delle tensioni nelle parti (compressione positiva)					
1	$c/t \leq 72\epsilon$	$c/t \leq 33\epsilon$	quando $\alpha > 0,5: c/t \leq \frac{396\epsilon}{13\alpha - 1}$ quando $\alpha \leq 0,5: c/t \leq \frac{36\epsilon}{\alpha}$		
2	$c/t \leq 83\epsilon$	$c/t \leq 38\epsilon$	quando $\alpha > 0,5: c/t \leq \frac{456\epsilon}{13\alpha - 1}$ quando $\alpha \leq 0,5: c/t \leq \frac{41,5\epsilon}{\alpha}$		
Distribuzione delle tensioni nelle parti (compressione positiva)					
3	$c/t \leq 124\epsilon$	$c/t \leq 42\epsilon$	quando $\psi > -1: c/t \leq \frac{42\epsilon}{0,67 + 0,33\psi}$ quando $\psi \leq -1: c/t \leq 62\alpha(1 - \psi)\sqrt{1 - \psi}$		
$\epsilon = \sqrt{235/f_{yk}}$	f_{yk}	235	275	355	420
e		1,00	0,92	0,81	0,75
					0,71

*) $\psi \leq -1$ si applica se la tensione di compressione $\sigma \leq f_{yk}$ o la deformazione a trazione $\epsilon_y > \epsilon_{yk}/E$

Piattabande esterne					
					
Profilati laminati a caldo			Sezioni saldate		
Classe	Piattabande esterne soggette a compressione	Piattabande esterne soggette a flessione e a compressione			
		Con estremità in compressione		Con estremità in trazione	
Distribuzione delle tensioni nelle parti (compressione positiva)					
1	$c/t \leq 9\epsilon$	$c/t \leq \frac{9\epsilon}{\alpha}$		$c/t \leq \frac{9\epsilon}{\alpha\sqrt{\alpha}}$	
2	$c/t \leq 10\epsilon$	$c/t \leq \frac{10\epsilon}{\alpha}$		$c/t \leq \frac{9\epsilon}{\alpha\sqrt{\alpha}}$	
Distribuzione delle tensioni nelle parti (compressione positiva)					
3	$c/t \leq 14\epsilon$	$c/t \leq 21\epsilon\sqrt{k_e}$ Per k_e vedere EN 1993-1-5			
$\epsilon = \sqrt{235/f_{yk}}$	f_{yk}	235	275	355	420
e		1,00	0,92	0,81	0,75
					0,71

Angolari					
					
Riferirsi anche alle piattabande esterne (v. Tab 4.2.II) Non si applica agli angoli in contatto continuo con altri componenti					
Classe	Sezione in compressione				
Distribuzione delle tensioni sulla sezione (compressione positiva)					
3	$h/t \leq 15\epsilon$ $\frac{b+h}{2t} \leq 11,5\epsilon$				


Sezioni Tubolari					
					
Classe	Sezione inflessa e/o compressa				
1	$d/t \leq 50\epsilon^2$				
2	$d/t \leq 70\epsilon^2$				
3	$d/t \leq 90\epsilon^2$ (Per $d/t > 90\epsilon^2$ vedere EN 1993-1-6)				
$\epsilon = \sqrt{235/f_{yk}}$	f_{yk}	235	275	355	420
e		1,00	0,92	0,81	0,75
e^2		1,00	0,85	0,66	0,56
					0,51

Tabella 3-1 Massimi rapporti larghezza spessore per parti compresse

3.1.1.2 Capacità resistente delle sezioni

La capacità resistente delle sezioni deve essere valutata nei confronti delle sollecitazioni di trazione o compressione, flessione, taglio e torsione, determinando anche gli effetti indotti sulla resistenza dalla presenza combinata di più sollecitazioni.

La capacità resistente della sezione si determina con uno dei seguenti metodi.

Metodo elastico (E)

Si assume un comportamento elastico lineare del materiale, sino al raggiungimento della condizione di snervamento. Il metodo può applicarsi a tutte le classi di sezioni, con l'avvertenza di riferirsi al metodo delle sezioni efficaci o a metodi equivalenti, nel caso di sezioni di classe 4.

Metodo plastico (P)

Si assume la completa plasticizzazione del materiale. Il metodo può applicarsi solo a sezioni di tipo compatto, cioè di classe 1 e 2.

Metodo elasto-plastico (EP)

Si assumono legami costitutivi tensione-deformazione del materiale di tipo bilineare o più complessi. Il metodo può applicarsi a qualsiasi tipo di sezione.

3.1.1.3 Metodi di analisi globale

L'analisi globale della struttura può essere condotta con uno dei seguenti metodi:

Metodo elastico (E)

Si valutano gli effetti delle azioni nell'ipotesi che il legame tensione-deformazione del materiale sia indefinitamente lineare. Il metodo è applicabile a strutture composte da sezioni di classe qualsiasi. La resistenza delle sezioni può essere valutata con il metodo elastico, plastico o elasto-plastico per le sezioni compatte (classe 1 o 2), con il metodo elastico o elasto-plastico per le sezioni snelle (classe 3 o 4).

Metodo plastico (P)

Gli effetti delle azioni si valutano trascurando la deformazione elastica degli elementi strutturali e concentrando le deformazioni plastiche nelle sezioni di formazione delle cerniere plastiche. Il metodo è applicabile a strutture interamente composte da sezioni di classe 1.

Metodo elasto-plastico (EP)

Gli effetti delle azioni si valutano introducendo nel modello il legame momento-curvatura delle sezioni ottenuto considerando un legame costitutivo tensione-deformazione di tipo bilineare o più complesso. Il metodo è applicabile a strutture composte da sezioni di classe qualsiasi. Le possibili alternative per i metodi di analisi strutturale e di valutazione della capacità resistente flessionale delle sezioni sono riassunte nella seguente Tabella 3-2

Metodo di analisi globale	Metodo di calcolo della capacità resistente della sezione	Tipo di sezione
(E)	(E)	tutte (*)
(E)	(P)	compatte (classi 1 e 2)
(E)	(EP)	tutte (*)
(P)	(P)	compatte di classe 1
(EP)	(EP)	tutte (*)
(*) per le sezioni di classe 4 la capacità resistente può essere calcolata con riferimento alla sezione efficace.		

Tabella 3-2: Metodi di analisi globali e relativi metodi di calcolo delle capacità e classi di sezioni ammesse

3.1.1.4 Effetti delle deformazioni

In generale, è possibile effettuare:

- l'analisi del primo ordine, imponendo l'equilibrio sulla configurazione iniziale della struttura,

- l'analisi del secondo ordine, imponendo l'equilibrio sulla configurazione deformata della struttura.

L'analisi globale può condursi con la teoria del primo ordine nei casi in cui possano ritenersi trascurabili gli effetti delle deformazioni sull'entità delle sollecitazioni, sui fenomeni di instabilità e su qualsiasi altro rilevante parametro di risposta della struttura. Tale condizione si può assumere verificata se risulta soddisfatta la seguente relazione:

$$\alpha_{cr} = \frac{F_{cr}}{F_{Ed}} \geq 10 \text{ per l'analisi elastica}$$

$$\alpha_{cr} = \frac{F_{cr}}{F_{Ed}} \geq 15 \text{ per l'analisi plastica}$$
3.2

dove α_{cr} è il moltiplicatore dei carichi applicati che induce l'instabilità globale della struttura, F_{Ed} è il valore dei carichi di progetto e F_{cr} è il valore del carico instabilizzante calcolato considerando la rigidezza iniziale elastica della struttura.

3.1.1.5 Effetto delle imperfezioni

Nell'analisi della struttura, in quella dei sistemi di controvento e nel calcolo delle membrane si deve tener conto degli effetti delle imperfezioni geometriche e strutturali quali la mancanza di verticalità o di rettilineità, la mancanza di accoppiamento e le inevitabili eccentricità minori presenti nei collegamenti reali.

A tal fine possono adottarsi nell'analisi adeguate imperfezioni geometriche equivalenti, di valore tale da simulare i possibili effetti delle reali imperfezioni da esse sostituite, a meno che tali effetti non siano inclusi implicitamente nel calcolo della resistenza degli elementi strutturali.

Si devono considerare nel calcolo:

- le imperfezioni globali per i telai o per i sistemi di controvento;
- le imperfezioni locali per i singoli elementi strutturali.

Gli effetti delle imperfezioni globali per telai sensibili agli effetti del secondo ordine possono essere riprodotti introducendo un errore iniziale di verticalità della struttura ed una curvatura iniziale degli elementi strutturali costituenti.

L'errore iniziale di verticalità in un telaio può essere trascurato quando:

$$H_{Ed} \geq 0,15Q_{Ed}$$
3.3

dove H_{Ed} è la somma delle reazioni orizzontali alla base delle colonne del piano (taglio di piano) considerato per effetto dei carichi orizzontali e Q_{Ed} è il carico verticale complessivamente agente nella parte inferiore del piano considerato (sforzi assiali nelle colonne).

Nel caso di telai non sensibili agli effetti del secondo ordine, nell'effettuazione dell'analisi globale per il calcolo delle sollecitazioni da introdurre nelle verifiche di stabilità degli elementi strutturali, la curvatura iniziale degli elementi strutturali può essere trascurata.

Nell'analisi dei sistemi di controvento che devono garantire la stabilità laterale di travi inflesse o elementi compressi, gli effetti delle imperfezioni globali devono essere riprodotti introducendo, sotto forma di errore di rettilineità iniziale, un'imperfezione geometrica equivalente dell'elemento da vincolare.

Nella verifica di singoli elementi strutturali, quando non occorra tenere conto degli effetti del secondo ordine, gli effetti delle imperfezioni locali sono da considerarsi inclusi implicitamente nelle formule di verifica di stabilità.

3.2 Verifiche

3.2.1 Stabilità delle membrature

3.2.1.1 Aste compresse

La verifica di stabilità di un'asta si effettua nell'ipotesi che la sezione trasversale sia uniformemente compressa. Deve essere

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} \leq 1 \quad 3.4$$

dove

N_{Ed} è l'azione di compressione di calcolo

$N_{b,Rd}$ è la resistenza all'instabilità nell'asta compressa, data da

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A f_{yk}}{\gamma_{M1}} \text{ per le sezioni di classe 1, 2 e 3,} \quad 3.5$$

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A_{eff} f_{yk}}{\gamma_{M1}} \text{ per le sezioni di classe 4.} \quad 3.6$$

I coefficienti χ dipendono dal tipo di sezione e dal tipo di acciaio impiegato; essi si desumono, in

funzione di appropriati valori della snellezza adimensionale $\bar{\lambda}$, dalla seguente formula

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \leq 1 \quad 3.7$$

Dove

$$\phi = 0.5[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2]$$

α è il fattore di imperfezione, e la snellezza adimensionale $\bar{\lambda}$ è pari a

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A f_{yk}}{N_{cr}}} \text{ per le sezioni di classe 1, 2 e 3, e a} \quad 3.8$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A_{eff} f_{yk}}{N_{cr}}} \text{ per le sezioni di classe 4.} \quad 3.9$$

N_{cr} è il carico critico elastico basato sulle proprietà della sezione lorda e sulla lunghezza di libera inflessione l_0 dell'asta, calcolato per la modalità di collasso per instabilità appropriata. Nel caso in cui $\bar{\lambda}$ sia minore di 0,2 oppure nel caso in cui la sollecitazione di calcolo N_{Ed} sia inferiore a $0,04 N_{cr}$, gli effetti legati ai fenomeni di instabilità per le aste compresse possono essere trascurati.

Limitazioni della snellezza

Si definisce lunghezza d'inflessione la lunghezza $l_0 = \beta l$ da sostituire nel calcolo del carico critico elastico N_{cr} alla lunghezza l dell'asta quale risulta dallo schema strutturale. Il coefficiente β deve essere valutato tenendo conto delle effettive condizioni di vincolo dell'asta nel piano di inflessione considerato.

Si definisce snellezza di un'asta nel piano di verifica considerato il rapporto

$$\lambda = \frac{l_0}{i}$$

dove

l_0 è la lunghezza d'inflessione nel piano considerato

i è il raggio d'inerzia relativo. È opportuno limitare la snellezza λ al valore di 200 per le membrature principali ed a 250 per le membrature secondarie.

Sezione trasversale		Limiti	Inflessione intorno all'asse	Curva di instabilità		
				S235, S275, S355, S420	S460	
Sezioni laminate		$h/b > 1,2$	$t_f \leq 40 \text{ mm}$	y-y z-z	a a ₀	
			$40 \text{ mm} < t_f \leq 100 \text{ mm}$	y-y z-z	b a	
		$h/b \leq 1,2$	$t_f \leq 100 \text{ mm}$	y-y z-z	b a	
			$t_f > 100 \text{ mm}$	y-y z-z	d c	
Sezioni ad I saldate		$t_f \leq 40 \text{ mm}$	y-y z-z	b c		
		$t_f > 40 \text{ mm}$	y-y z-z	c d		
Sezioni cave		Sezione formata "a caldo"	qualunque	a	a ₀	
		Sezione formata "a freddo"	qualunque	c	c	
Sezioni scatolari saldate		In generale	qualunque	b	b	
		saldature "spesse": $a > 0,5t_f$ $b/t_f < 30$; $h/t_w < 30$	qualunque	c	c	
Sezioni piene, ad U e T			qualunque	c	c	
Sezioni ad L			qualunque	b	b	
Curva di instabilità		a ₀	a	b	c	d
Fattore di imperfezione α		0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

Figura 3-1: Curve d'instabilità per varie tipologie di sezioni e classi d'acciaio, per elementi compressi.

3.2.1.2 Calcolo per l'asta presa in considerazione

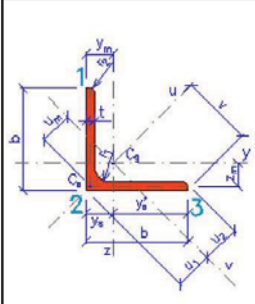
		Proprietà geometriche del profilo dall'asse minore	
		Asse y	Asse z
		$I_y = 5.43e+4 \text{ mm}^4$	$I_z = 5.43e+4 \text{ mm}^4$
		$W_{y1} = 1.91e+3 \text{ mm}^3$	$W_{z3} = 1.91e+3 \text{ mm}^3$
		$W_{y2} = 4.67e+3 \text{ mm}^3$	$W_{z2} = 4.67e+3 \text{ mm}^3$
		$i_y = 12 \text{ mm}$	$i_z = 12 \text{ mm}$
		Proprietà geometriche del profilo dall'asse maggiore	
		Asse u	Asse v
		$I_u = 8.61e+4 \text{ mm}^6$	$I_v = 2.25e+4 \text{ mm}^4$
$b = 40 \text{ mm}$	$A = 378.9 \text{ mm}^2$	$W_{u1} = 3.04e+3 \text{ mm}^3$	$W_{v2} = 1.37e+3 \text{ mm}^3$
$t = 5 \text{ mm}$	$G = 2.974 \text{ kg.m}^{-1}$	$i_u = 15.1 \text{ mm}$	$W_{v3} = 1.59e+3 \text{ mm}^3$
$r_1 = 6 \text{ mm}$	$A_L = 0.1548 \text{ m}^2.\text{m}^{-1}$	$u_m = 12.9 \text{ mm}$	$i_v = 7.7 \text{ mm}$
$r_2 = 3 \text{ mm}$	$v = 28.3 \text{ mm}$	Torsione e instabilità locale	
$y_s = 11.6 \text{ mm}$	$u_1 = 16.4 \text{ mm}$	$I_t = 3.15e+3 \text{ mm}^4$	$i_{pc} = 16.9 \text{ mm}$
$y'_s = 28.4 \text{ mm}$	$u_2 = 14.1 \text{ mm}$	$I_{yz} = 3.18e+4 \text{ mm}^4$	$i_{pa} = 21.3 \text{ mm}$

Figura 3-2 Profilo UNP 40x40x5

$$\gamma_{M1} = 1.05$$

$$f_{yk} = 235 \text{ MPa}$$

$$\beta = 0.9$$

$$l = 2350 \text{ mm}$$

$$l_0 = 2115 \text{ mm}$$

$$E = 206000 \text{ MPa}$$

$$J_{min} = 2.25 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$A = 379 \text{ mm}^2$$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{l_0^2} = 1.02 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$\alpha \text{ curva } b = 0.34$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A f_{yk}}{N_{cr}}} = 2.951$$

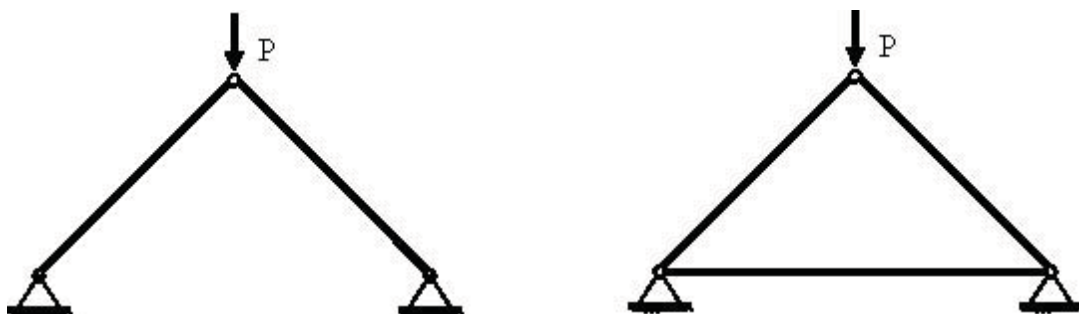
$$\phi = 0.5 \left[1 + \alpha (\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2 \right] = 5.32$$

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}} = 0.1025 \leq 1$$

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A f_{yk}}{\gamma_{M1}} = 8.699 \text{ KN}$$

4 STRUTTURE RETICOLARI

Si considerino un arco a tre cerniere, costituito da due corpi rigidi rappresentabili come travi collegate da cerniere puntuali. Supponiamo che in corrispondenza della cerniera interna agisca un carico concentrato, P .



Si può facilmente verificare che il carico agente in sommità viene trasmesso alle due cerniere a terra dalle due aste mediante sole forze di compressione. In altre parole, le due aste sono sollecitate solo da sforzi normali, in questo caso di compressione. Questo elementare modello di struttura a traliccio piana, di frequente impiego nelle prime applicazioni di copertura realizzati in materiale ligneo, è chiaramente ispirata al principio statico della triangolazione.

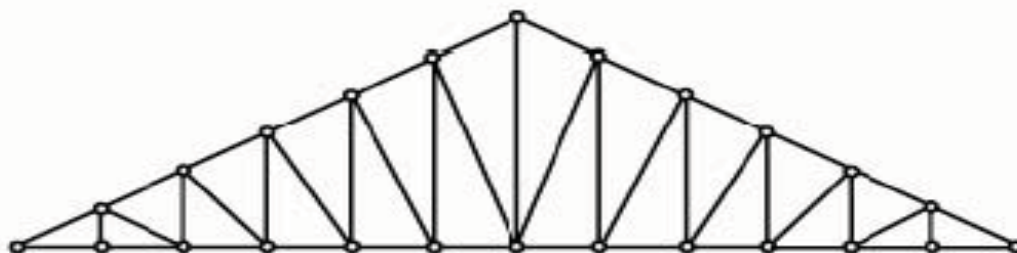


Figura 4-1: Capriata Polonceau

Se inseriamo una catena lignea a collegamento dei due appoggi, come illustrato nella figura precedente, otteniamo la cosiddetta capriata semplice a due spioventi. Tuttavia, l'impossibilità di coprire, mediante tale schema semplice, luci sempre più grandi ha condotto via via all'inserimento di ulteriori elementi strutturali al fine di parzializzarne la luce libera, fino ad ottenere elementi sempre più complessi quali ad esempio la capriata tipo Polonceau illustrata nella seguente Figura 4-1.

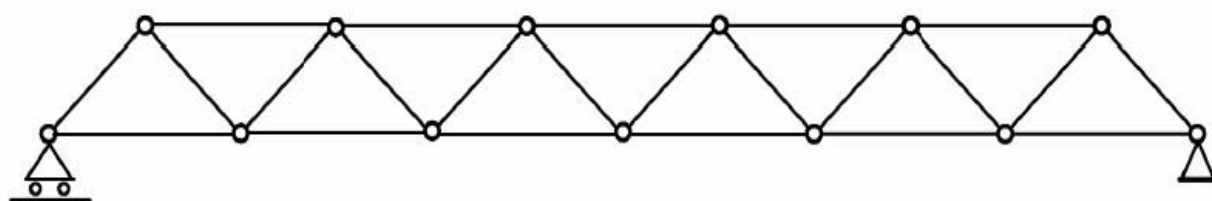


Figura 4-2: Travatura Warren: travatura reticolare senza montanti

Una struttura come quella indicata in figura è denominata anche come *struttura reticolare*. Le strutture reticolari offrono una delle più antiche soluzioni al problema delle coperture: le capriate in legno che coprivano le basiliche romane rappresentano un primo esempio.

Ma la forma reticolare dà anche soluzione ad un altro problema, la necessità di realizzare strutture di notevoli dimensioni con elementi relativamente piccoli. In

particolare, l'evoluzione di sistemi costruttivi basati su elementi reticolari ha portato al passaggio dalla trave ad anima piena alla trave reticolare. Il maggior sviluppo si ebbe nell'ottocento quando si riuscì a produrre industrialmente i laminati di ferro con caratteristiche meccaniche sufficientemente sicure, diffusamente utilizzati nella realizzazione di ponti ferroviari. Contemporaneamente, il reticolo di travi si viene ad orientare verso schemi caratterizzati ciascuno da un preciso funzionamento statico.

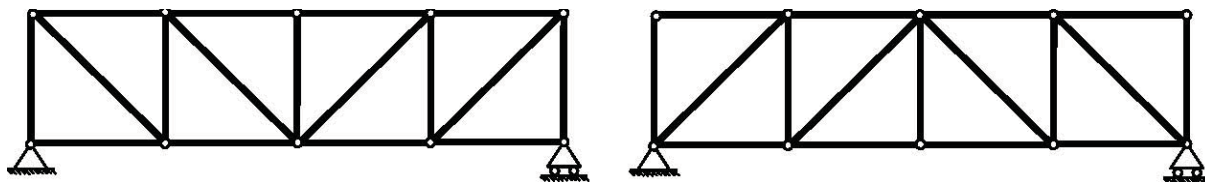


Figura 4-3: Trave Pratt, Trave Howe

Si fa così gradualmente strada la tendenza a realizzare composizioni del reticolo mediante una successione di elementi triangolari accostati, come per lo schema Warren (indicato nella seguente figura), considerato come soluzione ottimale per opere da ponte. Il vantaggio di questo schema sta nel fatto che permette di concentrare il materiale secondo le linee di massima concentrazione degli sforzi.

Se però l'altezza necessaria per raggiungere determinati livelli di rigidità è troppo estesa, nella trave Warren si raggiungono eccessive lunghezze degli elementi che possono provocare nelle aste compresse dei fenomeni di instabilità. Per tali motivi, si affermano altri tipi di travature reticolari, quali i tipi Pratt e Howe, illustrati nella seguente Figura 4-3.

Lo sviluppo delle strutture reticolari fu man mano sostenuto da un corpo di conoscenze scientifiche in rapida espansione, portando a realizzazioni sempre più articolate in relazione alle luci da coprire. Attualmente le strutture reticolari sono perlopiù realizzate in acciaio, alluminio o legno, raramente in cemento armato.

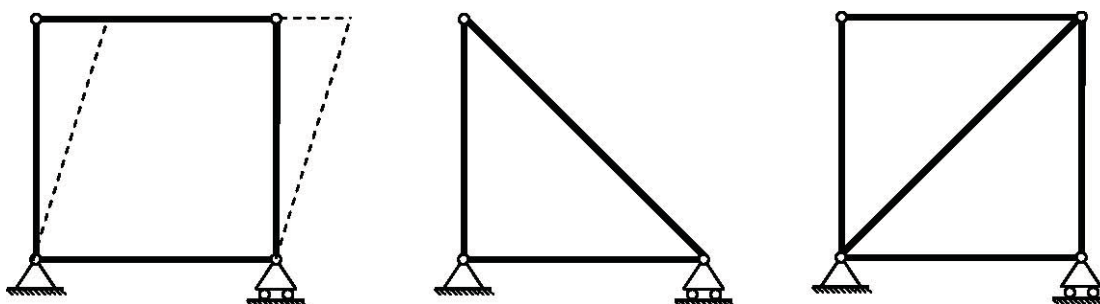
4.1 Geometria

La struttura reticolare quadrata formata da quattro aste evidentemente non è stabile. Si tratta di un meccanismo, e lo stesso vale per ogni struttura poligonale formata da quattro o più aste. Al contrario tre aste che formano un triangolo costituiscono una struttura stabile. Il triangolo è quindi la forma più semplice di struttura reticolare di cui costituisce pertanto anche la cellula base per formare un sistema rigido che non può essere deformato dall'applicazione di forze esterne senza la deformazione di uno o più, degli elementi che lo compongono. Le strutture reticolari formate per semplice giustapposizione di triangoli sono dette talora triangolazioni semplici.

Nello spazio a tre dimensioni la cellula base è il tetraedro e ogni nodo ha bisogno di tre aste per garantire la sua stabilità. Nelle strutture reticolari tutte le travi sono collegate tra loro mediante cerniere che possono essere considerate sferiche. Ogni trave è dunque una biella. Se poi i carichi sono concentrati sui nodi (sulle cerniere) le travi portano solo forze assiali.

Molto spesso è possibile immaginare i vincoli interni come veri e propri corpi rigidi. In quanto corpo rigido si deve quindi imporre l'equilibrio anche del vincolo tramite le equazioni cardinali della statica, in genere trascurando il peso del vincolo stesso. Per azione e reazione ogni corpo rigido esercita sui vincoli forze uguali ed opposte.

Poiché per ipotesi si suppone che le dimensioni della cerniera siano trascurabili, tutte le forze sono applicate in essa e quindi la seconda equazione cardinale della statica ($M_o = 0$) è soddisfatta. Il metodo appena descritto è il metodo generale per



stabilire le relazioni esistenti tra le reazioni vincolari interne. Dato un vincolo se ne impone l'equilibrio considerando tutte le forze esercitate sul vincolo, siano esse esterne, reattive interne, o reattive esterne.

Si definisce struttura reticolare un insieme di aste rettilinee incernierate collegate le une alle altre mediante nodi in modo da formare una struttura portante stabile, piana oppure spaziale. Trave reticolare è un sistema reticolare, formante un'unica membratura, nel quale una dimensione (la lunghezza) è largamente preponderante rispetto all'altra (o alle altre nel caso tridimensionale).

Fra le diverse aste che compongono la struttura si distinguono i *correnti*, costituiti dalle aste essenzialmente orientate nella direzione della dimensione maggiore della trave reticolare, e le *diagonali* e montanti, costituiti da aste orientate obliquamente o trasversalmente a tale direzione.

Se i carichi sono costituiti unicamente da forze concentrate sulle cerniere, ogni asta risulterà soggetta a sola azione assiale, o sforzo normale, essendo quest'ultima l'unica caratteristica di sollecitazione compatibile con l'equilibrio dei singoli elementi costitutivi isolati dal complesso strutturale e con le prestazioni statiche dei vincoli. Quindi, una struttura reticolare per definizione ha il seguente schema statico:

- i nodi sono cerniere perfette;
- gli assi delle aste concorrono ai nodi senza eccentricità;
- i carichi agiscono solo sui nodi, affinché le aste possano trasmettere forze solo alle loro estremità. In virtù di questa ultima ipotesi le aste saranno soggette soltanto a sforzo normale, di trazione o compressione.

La generica asta tesa si definisce comunemente come *tirante*, quella compressa come *puntone*. Ciò permette un significativo risparmio di materiale rispetto alle travi a parete piena. E' molto importante che le travature reticolari siano caricate solamente da forze concentrate applicate nei nodi, affinché, negli elementi, si sviluppino solo sforzi di trazione o di compressione. Se i carichi fossero applicati direttamente agli

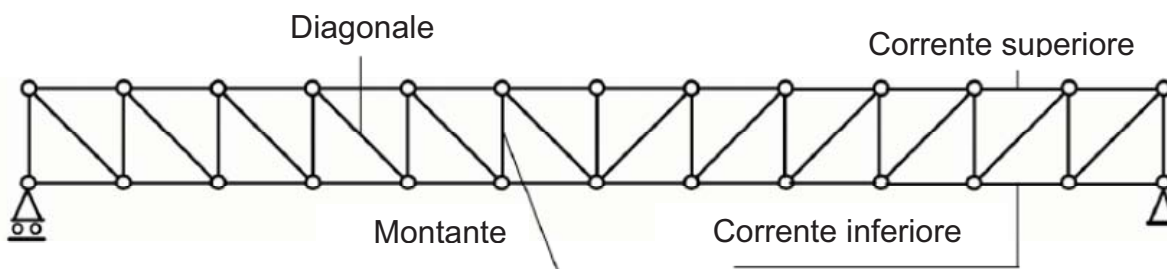


Figura 4-4: Struttura reticolare: terminologia

elementi stessi si svilupperebbero anche degli sforzi dovuti alla flessione e al taglio. Questa modellazione fornisce risultati soddisfacenti, nel senso che le aste sono sollecitate solo da sforzo normale, quando: i nodi sono piccoli e le aste sono snelle, gli assi delle aste sono concorrenti, i carichi sono trasmessi ai nodi. Le inevitabili imperfezioni (peso proprio delle aste, ecc.) introducono solo effetti secondari,

trascurabili in prima approssimazione. Ad esempio il peso proprio delle aste non è evidentemente trascurabile e se ne tiene conto, in pratica, concentrando la metà del peso di ogni asta su ciascuna delle sue estremità.

Ciò che invece è trascurabile è l'effetto locale del peso proprio su ciascuna asta considerata isolatamente. Una generica struttura tridimensionale o piana, si identifica per sua stessa definizione con un sistema di corpi rigidi vincolati mutuamente e con l'esterno. Tuttavia è comodo considerare invertiti i ruoli dei nodi e delle aste: riguardare cioè i primi come corpi puntiformi, ciascuno dotato di 2 (o 3 nello spazio) gradi di libertà, e le seconde come vincoli interni semplici che controllano la distanza relativa tra due nodi.

Esiste una relazione tra il numero di nodi e il numero di aste. Se N_c è il numero di cerniere (nodi), N_a il numero di aste e N_e il numero di vincoli semplici esterni, affinché il sistema sia staticamente e cinematicamente determinato, nell'ipotesi che i vincoli siano ben disposti (condizione sufficiente), è necessario che il numero di vincoli, $N_a + N_e$, sia pari ai gradi di libertà del sistema, cioè: $N_a + N_e = 2N_c$ *nel piano* ($3N_c$ *nello spazio*)

Il problema statico delle strutture reticolari consiste nel calcolo dello sforzo normale in tutte le aste. Tale calcolo è possibile servendosi delle sole equazioni di equilibrio. Tutte le travi sono bielle caricate agli estremi: ogni trave sopporta solo carico assiale costante lungo la trave. Si noti che questa semplice osservazione permette di affermare che le equazioni cardinali della statica sono già automaticamente soddisfatte per ogni asta isolata, qualunque sia il valore delle azioni assiali.

In realtà ciò che resta da fare è imporre l'equilibrio dei perni delle cerniere, cioè dei vincoli interni. Il primo passo nell'analisi di una struttura reticolare è isolarne una parte e considerare il sistema di forze agente su di essa. Se alcune forze sono note, è possibile calcolare le altre mediante le equazioni cardinali della statica, dato che la porzione in esame dovrà risultare in equilibrio. L'estensione della porzione di struttura scelta per lo studio dell'equilibrio non è vincolata in alcun modo. Potrebbe essere limitata ad un singolo nodo o ad un insieme composto da diversi elementi e nodi. Il sistema di forze considerato consiste non solamente di ciascuna forza esterna applicata alla parte in esame, ma anche delle forze interne alla struttura. Nel seguito vengono illustrati i due principali metodi per la determinazione degli sforzi nelle aste di un sistema reticolare: il *metodo dei nodi* e il *metodo delle sezioni* o di *Ritter*.

4.2 Metodo dei nodi

In diverse geometrie di travature è possibile risolvere lo stato di sollecitazione operando per nodi successivi. Tale procedimento richiede di individuare un nodo semplice o canonico, definito come nodo in cui convergono due aste e di risolverlo mediante le due equazioni di equilibrio del nodo stesso. Si procede quindi nell'isolare un nodo della struttura reticolare tagliando le aste che vi convergono.

Si esplicitano quindi gli sforzi normali trasmessi dalle aste al nodo e le eventuali forze esterne. Si scrivono infine le equazioni di equilibrio per il nodo in esame. Poiché le forze sono convergenti al nodo, l'equazione di equilibrio dei momenti rispetto al nodo stesso è identicamente soddisfatta ($\sum M_{nodo}=0$). Nel caso piano si hanno pertanto a disposizione per ogni nodo solo le rimanenti due equazioni di equilibrio: $\sum F_{x,nodo}=0$ $\sum F_{y,nodo}=0$. Si procede in sequenza, scrivendo l'equilibrio di un primo nodo e poi, servendosi dei risultati ottenuti, di un secondo e così di seguito. Tuttavia poiché si hanno a disposizione solo due equazioni di equilibrio per nodo, è necessario disporre di almeno un nodo a cui sono collegate solo due aste, in modo

da avere in partenza due sole incognite. Successivamente si procederà utilizzando di volta in volta nodi per i quali si abbiano due sole incognite.

4.3 Metodo delle sezioni o metodo di Ritter

In diverse situazioni può non essere necessario determinare lo sforzo normale in tutte le aste, ma solo in alcune, ad esempio le più sollecitate. Una travatura reticolare generata a partire da un triangolo iniziale presenta la proprietà di poter essere tagliata da una sezione ideale, che divida la struttura integralmente in due parti sezionando solo tre aste non concorrenti nello stesso punto. Si può quindi disegnare lo schema isolato di una delle due porzioni.

I limiti della porzione considerata possono essere quindi estesi fino a considerare un sottoinsieme costituito da diversi nodi e diverse aste.

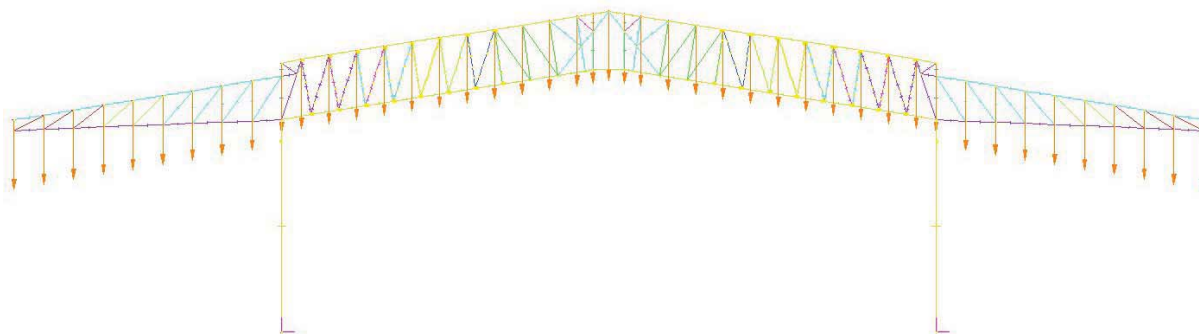


Figura 4-5: Reticolare a beam con carico unitario

Se preventivamente sono state calcolate le eventuali reazioni scrivendo l'equilibrio di tutto il traliccio, restano come incognite solo gli sforzi normali di tutte le aste tagliate. Poiché l'equilibrio di questa porzione consente di scrivere solo tre equazioni, il taglio non dovrà evidenziare più di tre incognite. In generale, è comunque conveniente effettuare un taglio che consenta di calcolare uno sforzo normale incognito quale che sia il numero di aste tagliate. Infine, poiché gli sforzi normali che si agiscono sulle sezioni delle aste tagliate sono gli stessi per le due porzioni, si può scrivere l'equilibrio per una sola porzione, quella che porta a calcoli più semplici.

Se la sezione taglia tre aste non concorrenti nello stesso nodo, lo sforzo in una delle tre aste viene calcolato mediante un'equazione di equilibrio dei momenti intorno al polo in cui convergono le altre due. Lo stesso risultato si ottiene utilizzando la relazione $\sum F_x = 0$

Si procede quindi con il calcolo dello sforzo normale agente sull'asta L40x40x5 con un carico nodale di 1KN.

$$P = 8.3 \text{ KN}$$

5 Metodi di convergenza della soluzione

Il punto di partenza nell'analisi delle strutture snelle è la scrittura dell'energia potenziale totale. Si assume un legame iperelastico tra le tensioni σ e le deformazioni ε e che il campo di forze esterne sia conservativo e linearmente dipendente da un parametro $\lambda \in R$

$$p(\lambda) = \lambda \hat{p}$$

Sia inoltre $u \in D$ il generico campo di spostamenti, misurato a partire dalla configurazione di riposo della struttura per $\lambda = 0$. Sotto queste ipotesi, la generica configurazione di equilibrio è caratterizzata dalla condizione di stazionarietà dell'energia potenziale del sistema

$$\Pi(u, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(u) - p(\lambda)u = \text{staz}_{(u)}, \forall u \in U \quad 5.1$$

dove U è l'insieme di tutti i campi di spostamento cinematicamente ammissibili per la struttura, $\Phi[u]$ rappresenta l'energia di deformazione e $p(\lambda)u$ il potenziale dei carichi assunto lineare negli spostamenti u . La non linearità del legame cinematico, fa sì che l'energia di deformazione $\Phi(u)$ sia non lineare nei parametri u . La formulazione integrale del problema (5.1) si ottiene imponendo la stazionarietà del funzionale $\Pi(u, \lambda)$ sull'insieme degli spostamenti cinematicamente ammissibile

$$\Pi'(u, \lambda)\delta u = \Phi'(u)\delta u - p(\lambda)u = 0, \forall \delta u \in T \quad 5.2$$

Dove si è indicata con l'apice la derivata rispetto a $u \in D$, mentre T indicalo spazio tangente ad U nel punto u (per le ipotesi di linearità di U , T risulta indipendente da u).

In ambito meccanico, la (5.2) è nota come equazione dei lavori virtuali. Essa definisce per la struttura in esame una relazione, in generale non lineare, tra i valori del moltiplicatore dei carichi λ e dello spostamento u .

Una discretizzazione della struttura ad n gradi di libertà, ad esempio basata su elementi finiti, consente di pervenire dalla (5.2) al seguente sistema di equazioni non lineare

$$f(u, \lambda) = s(u) - \lambda \hat{p} = 0 \quad 5.3$$

essendo $\lambda \hat{p} \in R^n$ il vettore delle forze esterne generalizzate, $u \in R^n$ il vettore degli spostamenti generalizzati ed $s \in R^n$ il relativo vettore della risposta strutturale.

La (5.3) è un sistema di n equazioni algebriche nonlineari nelle $n + 1$ incognite (u, λ) che definisce, in forma implicita, una curva nello spazio R^{n+1} detta percorso di equilibrio. La ricostruzione della curva di equilibrio permette di ottenere tutte le informazioni necessarie per una corretta valutazione della capacità portante delle strutture snelle. Particolare attenzione sarà riservata alla topologia ed alla ricostruzione numerica della curva di equilibrio.

5.1 Percorsi di equilibrio e punti critici

Per un dato valore del parametro di carico λ , la (5.3) può ammettere più di una soluzione: dunque il percorso di equilibrio è, in generale, composto da più "rami". Lo studio del comportamento nonlineare della struttura prevede almeno la determinazione del ramo che corrisponde ad una deformazione continua del corpo a partire dallo stato indeformato: il cosiddetto percorso fondamentale. Una conoscenza più approfondita della risposta strutturale richiede lo studio dei punti critici lungo il percorso di equilibrio. Questi, generalmente classificati in punti limite e punti di

biforcazione, corrispondono, per definizione, ad una condizione di singolarità dell'operatore $\Phi''[u]$ che definisce la tangente al percorso.

Al fine di approfondire il concetto di punto critico è utile introdurre un parametro $\xi \in R$ che consenta, per la curva di equilibrio, una rappresentazione del tipo

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}(\xi) \\ \lambda = \lambda(\xi) \end{cases} \quad 5.4$$

La (5.3) diventa così

$$f(\xi) \equiv s(\mathbf{u}(\xi)) - \lambda(\xi)\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad 5.5$$

mentre per la tangente al percorso di equilibrio, che si ottiene derivando la (5.5) rispetto al parametro ξ , si ha

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{u}} - \dot{\lambda}\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad 5.6$$

dove si è posto $\mathbf{K} = ds/du$ e

$$\dot{\mathbf{u}} := \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \quad \dot{\lambda} := \frac{d\lambda}{d\xi} \quad 5.7$$

Si definisce regolare un punto del percorso di equilibrio caratterizzato dalla condizione

$$rango(\mathbf{K}) = n$$

In corrispondenza di un punto regolare è sufficiente, in aggiunta alla (5.6), una equazione di normalizzazione per la determinazione del vettore tangente $(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\lambda})$.

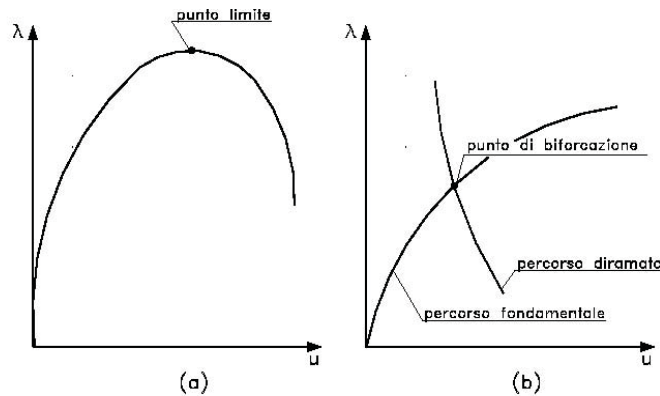


Figura 5-1: a) punto limite per il carico; b) biforcazione semplice

In un punto critico del percorso di equilibrio si ha invece, per definizione, un kernel non vuoto dell'operatore rappresentato dalla matrice di rigidezza \mathbf{K}

$$rango(\mathbf{K}) < n$$

In particolare se esiste un solo modo critico $\dot{\mathbf{v}}$ si ha

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad (rango(\mathbf{K}) = n - 1) \quad 5.8$$

e la condizione (5.6) che definisce la tangente diventa

$$\dot{\lambda} \hat{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{v}} = 0 \quad 5.9$$

La (5.9) ammette le seguenti due soluzioni

$$\dot{\lambda} = 0 \quad \hat{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{v}} \neq 0 \quad 5.10$$

$$\dot{\lambda} \neq 0 \quad \hat{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{v}} = 0 \quad 5.11$$

che definiscono rispettivamente un punto limite per il carico ed un punto di biforcazione (Figura 5-1). Poiché la condizione (5.11) consiste in una ortogonalità tra il modo critico ed il carico agente, il verificarsi di una biforcazione deve essere considerata una eccezionalità per le strutture reali: per questo motivo le strutture che presentano una biforcazione si dicono perfette.

Si osservi ora che la soluzione della (5.6) può essere posta nella forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_c &= \dot{\lambda} \hat{\mathbf{u}} + \beta \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\lambda}_c &= \dot{\lambda} \end{aligned} \quad 5.12$$

dove $\hat{\mathbf{u}}$ è la soluzione particolare corrispondente a $\dot{\lambda} = 1$ e $\dot{\mathbf{v}}$ è la soluzione del problema omogeneo (5.8). Dalle (5.10-5.12) segue che, nel caso di punto limite, è sufficiente una equazione di normalizzazione per definire univocamente la tangente (ovvero per determinare il parametro β). Dalla prima delle (5.11) segue invece che, in corrispondenza di un punto di biforcazione, esistono due diverse tangenti al percorso: la prima, per $\beta = 0$ definisce il percorso fondamentale; la seconda, per $\beta \neq 0$ definisce il percorso diramato. Si osservi che per la determinazione delle due tangenti nel punto di biforcazione non è sufficiente la sola equazione di normalizzazione, essendo incogniti, oltre al vettore $\dot{\mathbf{u}}$, i due valori $\dot{\lambda}$ e β .

La caratterizzazione del percorso diramato, ovvero l'espressione di $\dot{\lambda}_c$, si può ottenere con l'uso delle variazioni terze dell'energia di deformazione.

La condizione (5.8), che definisce un punto critico semplice, è solo un caso particolare della

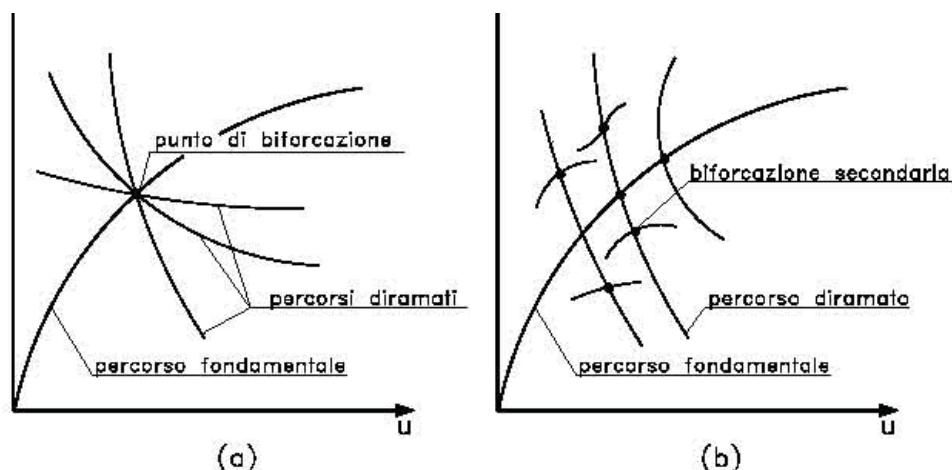
$$\mathbf{K} \dot{\mathbf{v}}_i = 0, \quad i = 1 \dots m \quad (\text{rango}(\mathbf{K}) = n - m) \quad 5.13$$

che caratterizza invece un punto critico multiplo. In quest'ultimo caso si hanno m modi critici ed, eventualmente, la biforcazione multipla (si dimostra che gli eventuali percorsi diramati non sono però $m + 1$ ma, in generale, molti di più).

Un caso più realistico è quello di biforcazioni a grappolo, schematicamente rappresentato in Figura 5-2, in cui il percorso fondamentale presenta un grappolo di biforcazioni semplici, molto vicine tra loro, e di percorsi diramati che sono caratterizzati dalla presenza di biforcazioni secondarie.

Per quanto appena illustrato, relativamente alla complessità dei fenomeni che insorgono in ambito geometricamente nonlineare, è evidente che la determinazione dei relativi percorsi di equilibrio può costituire un problema computazionalmente molto impegnativo.

Figura 5-2: a) biforcazione multipla; b) biforcazione a grappolo

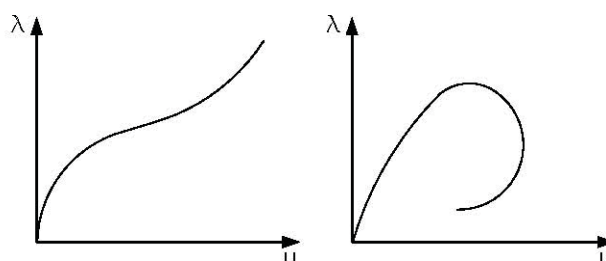


5.2 L'approccio path-following per la determinazione dei percorsi di equilibrio

5.2.1 Introduzione

Alla base dell'approccio path-following (o incrementale) vi è l'idea di determinare una successione di soluzioni $(\mathbf{u}^{(i)}, \lambda^{(i)})$ della (5.3), dette configurazioni di equilibrio, e di ricostruire per interpolazione il percorso. Il problema può quindi essere riformulato come segue: nota la k-esima configurazione di equilibrio $(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})$, determinare la nuova configurazione $(\mathbf{u}^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)})$.

Le tecniche path-following assumono, nella formulazione di base, l'esistenza di una dipendenza continua della funzione (5.5) dal parametro ξ . Rientrano in tale fattispecie i percorsi, rappresentati in Figura 5-3, che presentano un punto limite (per il carico o per lo spostamento), ma non vi rientrano i percorsi che presentano punti di biforcazione.

Figura 5-3: Percorsi di equilibrio a dipendenza continua dal parametro ξ

Tale circostanza non impedisce, ai fini applicativi, l'utilizzo della strategia path-following. Ciò in quanto, come già evidenziato, le strutture perfette costituiscono un'eccezione nella pratica: infatti, nelle applicazioni reali, occorre valutare la risposta nonlineare della struttura in presenza di quelle imperfezioni iniziali, di geometria e di carico, inevitabili nella pratica costruttiva, che impediscono il realizzarsi della condizione di biforcazione (

5.11). La presenza delle imperfezioni iniziali infatti, determina la trasformazione del percorso originario della struttura perfetta, in un percorso privo di biforcazione come illustrato in Figura 5-4

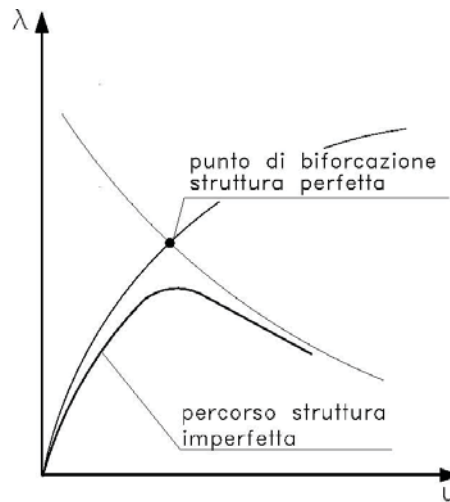


Figura 5-4: Percorso di equilibrio di una struttura perfetta e percorso

5.2.2 Metodo di Eulero

Il metodo più immediato che porta ad una stima di $(\mathbf{u}^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)})$ si basa sulla seguente estrapolazione lineare della (5.3), a partire dall'ultimo punto determinato sul percorso

$$s(\mathbf{u}^{(k)}) + \left[\frac{ds(\mathbf{u})}{d\mathbf{u}} \right]_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^{(k)}} (\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^{(k)}) - \lambda^{(k)} \hat{\mathbf{p}} - (\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}) \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad 5.14$$

che, essendo $(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})$ una configurazione di equilibrio, fornisce

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{K}^{-1}(\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}) \hat{\mathbf{p}} \quad 5.15$$

dove $\mathbf{K} = [ds(\mathbf{u})/d\mathbf{u}]_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^{(k)}}$ è la matrice di rigidità tangente valutata nella configurazione di equilibrio k-esima.

Tale tecnica, illustrata in Figura 5-5a, prende il nome di metodo di estrapolazione alla Eulero. Ovviamente l'aver trascurato nello sviluppo in serie (5.14) i termini di

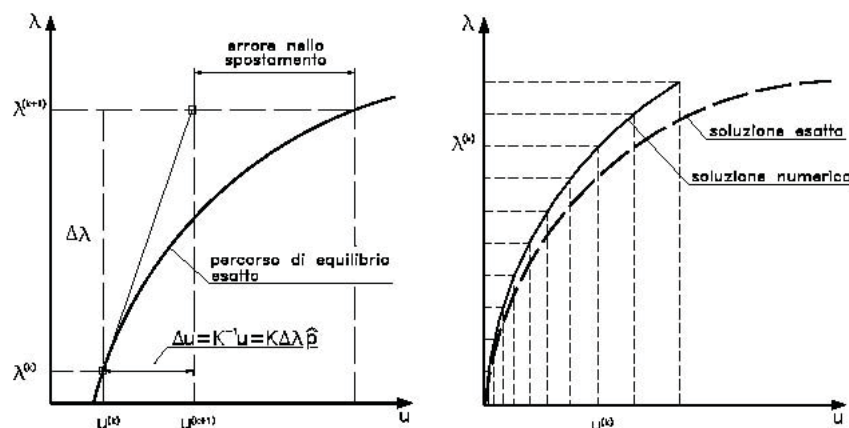


Figura 5-5: Metodo di estrapolazione alla Eulero ed 'effetto deriva ordine superiore al primo, comporta un errore di approssimazione nella valutazione della $\mathbf{u}^{(k+1)}$.

È facile verificare che l'errore introdotto nel singolo passo risulta dell'ordine di $(\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)})^2$ e dunque, anche se la successione dei passi è molto fitta, si ha il fenomeno di deriva illustrato in Figura 5-5b: la soluzione numerica e quella esatta si discostano progressivamente tra loro a causa della capitalizzazione dell'errore introdotto al k-esimo passo.

Un semplice, ma parziale, rimedio a tale fenomeno di deriva consiste nell'inserire nel termine noto della (5.15) anche l'errore di equilibrio $(\lambda^{(k)}\hat{\mathbf{p}} - s^{(k)})$ presente ad inizio passo. Si ottiene così lo schema di Eulero corretto:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(k+1)} &= \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{K}^{-1}[(\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)})\hat{\mathbf{p}} + (\lambda^{(k)}\hat{\mathbf{p}} - s^{(k)})] \\ &= \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{K}^{-1}(\lambda^{(k+1)}\hat{\mathbf{p}} - s^{(k)}) \end{aligned} \quad 5.16$$

La (5.16), pur evitando il fenomeno di deriva, produce un'oscillazione della soluzione numerica attorno a quella esatta, come rappresentato in Figura 5-6, che rende comunque poco affidabili i risultati.

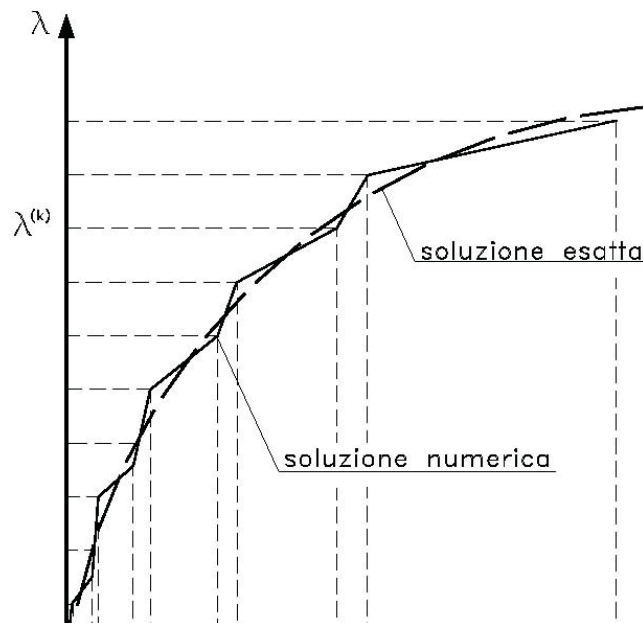


Figura 5-6: Metodo di estrapolazione alla Eulero corretto

5.2.3 Metodi incrementali-iterativi

Come si è visto il metodo incrementale puro appena descritto presenta alcuni inconvenienti, dovuti all'assenza di controllo dell'errore al generico passo k-esimo, che possono essere superati con una tecnica incrementale-iterativa. Tale approccio consiste nel considerare la soluzione alla Eulero $(\mathbf{u}^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)})$ solo come una prima stima della soluzione esatta (predictor). Definito quindi il residuo all'equilibrio come

$$\mathbf{r}_j \equiv s(\mathbf{u}_j) - \lambda^{(k+1)}\hat{\mathbf{p}} \quad 5.17$$

è necessario un procedimento (fase corrector) che migliori la stima iniziale della soluzione al passo k+1, fino a quando una opportuna misura $\|\mathbf{r}_j\|$ del residuo risulti inferiore ad una prefissata tolleranza ε :

$$\|\mathbf{r}_j\| < \varepsilon \quad 5.18$$

La fase corrector può essere realizzata impostando un processo iterativo che produca una sequenza $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ con la proprietà che

$$\|\mathbf{r}_0\| > \dots \|\mathbf{r}_m\| > \|\mathbf{r}_{m+1}\| \quad 5.19$$

In un generico metodo iterativo l'elemento \mathbf{u}_{j+1} della successione viene in genere determinato da quello precedente \mathbf{u}_j sulla base di una relazione del tipo

$$\mathbf{u}_{j+1} = \gamma(\mathbf{u}_j) \quad 5.20$$

dove la funzione $\gamma[\mathbf{u}]$ qualifica il metodo utilizzato. In particolare il classico metodo di Newton-Raphson si basa sulla seguente assunzione

$$\gamma(\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_j - \left[\frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{u}} \right]_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_j}^{-1} \mathbf{r}_j = \mathbf{u}_j - \mathbf{K}_j^{-1} \mathbf{r}_j \quad 5.21$$

La (5.21) si ottiene imponendo l'annullarsi dell'approssimazione al primo ordine del residuo alla j -esima iterazione. Infatti si ha

$$\mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{r}_j + \left[\frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{u}} \right]_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_j} (\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{u}_j) + O(\|\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{u}_j\|^2) = 0 \quad 5.22$$

e, trascurando il termine $O(\|\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{u}_j\|^2)$, si ottiene la (5.21). L'andamento delle iterazioni nel metodo di Newton-Raphson è schematicamente illustrato in Figura 5-7

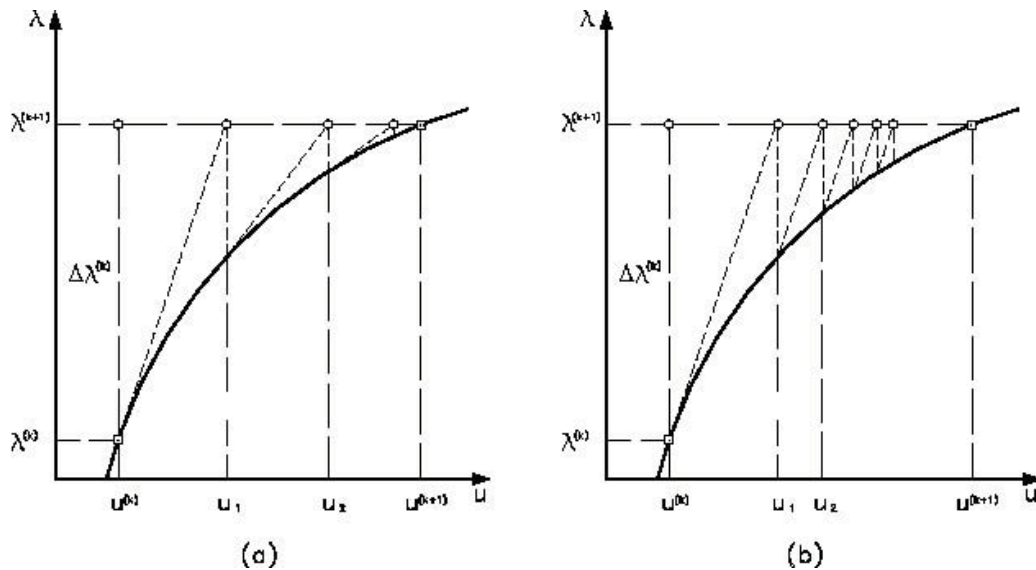


Figura 5-7: Andamento delle iterazioni nel metodo di Newton-Raphson(a) e Newton-Raphson modificato (b)

Quanto alle proprietà di convergenza si dimostra che, se il valore di inizio iterazione $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}^{(k)}$ è sufficientemente vicino alla soluzione esatta $\mathbf{u}^{(k+1)}$, risulta

$$\|\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{u}^{(k+1)}\| < C \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}^{(k+1)}\|^2 \quad 5.23$$

con $C > 0$, ovvero il metodo è localmente convergente in modo almeno quadratico.

Il metodo di Newton-Raphson risulta computazionalmente molto oneroso a causa della necessità, ad ogni ciclo iterativo, di assemblaggio e decomposizione della matrice di rigidità K e della soluzione di un sistema lineare.

Tali considerazioni suggeriscono di abbattere i tempi di calcolo eseguendole iterazioni(5.21) nella forma

$$\gamma(\mathbf{u}_j) = - \left[\frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{u}} \right]_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^{(k)}}^{-1} \quad \mathbf{r}_j = \mathbf{u}_j - \tilde{\mathbf{K}}_j^{-1} \mathbf{r}_j \quad 5.24$$

ovvero utilizzando una matrice $\tilde{\mathbf{K}}$ costante (ad esempio assemblata in corrispondenza dell'ultimo punto di equilibrio determinato). Il metodo definito dalla (5.24), detto di Newton-Raphson modificato, richiede più iterazioni a parità di tolleranza sull'errore (si dimostra in particolare che la convergenza è in tal caso lineare): la convenienza sussiste quando l'aggiornamento continuo comporterebbe una riduzione del numero di iterazioni superiore a circa $m/4$.

Altre strategie tese alla minimizzazione dell'impegno computazionale complessivo possono essere implementate:

- l'ampiezza del passo di carico può essere determinata in funzione della nonlinearità del percorso;
- l'aggiornamento della matrice di iterazione può essere ritardato, continuando ad usare la matrice del passo precedente, sin quando la velocità di convergenza (misurata in termini di numero di iterazioni) tende ad aumentare eccessivamente;
- la soluzione di inizio iterazione $(\mathbf{u}_0, \lambda^{(k+1)})$ può essere ricavata per estrapolazione sulla base delle soluzioni ai passi precedenti;

Tutti i metodi incrementali illustrati sono basati su un controllo del processo in termini del parametro di carico λ . Come conseguenza essi non sono in grado di gestire la ricostruzione del percorso di equilibrio nelle zone 'piatte', vicine ai punti limite, dove non esiste più corrispondenza biunivoca tra parametro di carico e spostamento.

La soluzione più comune è quella di procedere, in tali zone del percorso, per incrementi di una prefissata componente di spostamento, come illustrato in Figura 5-8, determinando, nel corso del procedimento iterativo alla Newton, il relativo parametro di carico e le restanti componenti di spostamento. La possibile presenza di punti di stazionarietà della componente di spostamento utilizzata per controllare il processo, spinge poi ad implementare tecniche più articolate in cui si passa automaticamente dal controllo tramite λ al controllo tramite u e viceversa.

Occorre osservare che tale tecnica, inizialmente proposta da Argyrisin, richiede una buona conoscenza a priori del comportamento della struttura per conseguire la scelta ottimale della componente di spostamento con la quale controllare il processo.

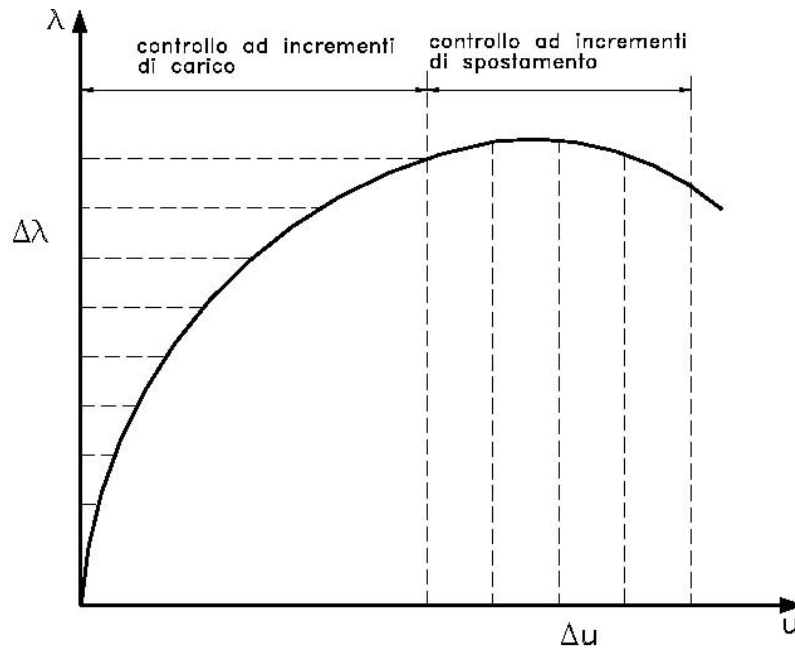


Figura 5-8: Metodo incrementale a controllo misto

5.3 Il metodo dell'arco di curva (Riks)

La parametrizzazione (5.4), introdotta per evidenziare alcune caratteristiche della curva di equilibrio, è alla base del metodo dell'arco di curva che, superando gli inconvenienti dei metodi tradizionali, costituisce attualmente il più utilizzato strumento di analisi path-following delle strutture a comportamento nonlineare.

L'idea è quella di utilizzare come parametro di controllo del processo incrementale una grandezza che conservi sempre l'unicità della definizione. La scelta di tale parametro equivale a completare le equazioni (5.5) con la definizione di ξ che, genericamente, può essere rappresentata dalla relazione

$$g(\mathbf{u}, \lambda, \xi) = 0 \quad 5.25$$

In tal modo le (5.5) e (5.25) costituiscono un sistema di $n + 1$ equazioni nelle $n + 1$ incognite (\mathbf{u}, λ) . Da un punto di vista geometrico la (5.25) definisce una superficie, detta superficie di vincolo (vedi Figura 5-9), in la cui intersezione con la curva data dalla (5.5) fornisce il punto di equilibrio. In altre parole al variare del parametro ξ la superficie varia nello spazio R^{N+1} e le intersezioni con la curva (5.5) definiscono una sequenza di punti lungo il percorso di equilibrio.

Ovviamente la superficie di vincolo deve godere della proprietà fondamentale di intersecare il percorso di equilibrio. Come mostrato da Riks, la qualità dell'intersezione tra le (5.5) e (5.25) è direttamente legata alla relativa orientazione tra curva e superficie. In particolare una superficie di vincolo rappresenta una parametrizzazione efficace se, nel punto di intersezione, l'angolo θ tra il vettore normale $\bar{\mathbf{n}} = (\mathbf{n}, \nu)$ alla superficie (5.25) ed il vettore tangente $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{\mathbf{u}}, \dot{\lambda})$ alla curva di equilibrio, è inferiore a $\pi/2$ (Figura 5-9).

Quando $\bar{\mathbf{n}}$ e $\dot{\mathbf{x}}$ diventano ortogonali, si è in presenza di un punto di gomito e l'intersezione degenera. Ai fini del metodo dell'arco di curva, ogni superficie (5.25) che soddisfa questa condizione fornisce una corretta parametrizzazione della curva

di equilibrio. Una prima conseguenza di ciò è che la parametrizzazione, e quindi la (5.25), dovrà essere variabile lungo la curva (parametrizzazione adattiva).

Al fine di formulare l'algoritmo di soluzione è utile riferirsi al generico punto di equilibrio $x(\xi) \in R^{n+1}$ espresso in funzione del parametro ξ

$$x(\xi) = \begin{Bmatrix} u(\xi) \\ \lambda(\xi) \end{Bmatrix} \quad 5.26$$

Il sistema di equazioni nonlineari in $n + 1$ incognite che definisce il problema può così essere posto nella forma

$$R(x, \xi) := \begin{Bmatrix} r(x) \\ g(x, \xi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s(x) - \lambda(\xi)\hat{p} \\ g(x, \xi) \end{Bmatrix} = 0 \quad R \in R^{n+1} \quad 5.27$$

Nello spirito dell'approccio incrementale-iterativo, se le prime k soluzioni $x^{(i)} = x(\xi_i)$, $i = 0 \dots k$ sono state determinate, è necessario calcolare il nuovo punto $x^{(k+1)}$ attraverso le successive stime x_j , $j = 0, 1 \dots$. La ricerca del nuovo punto di equilibrio,

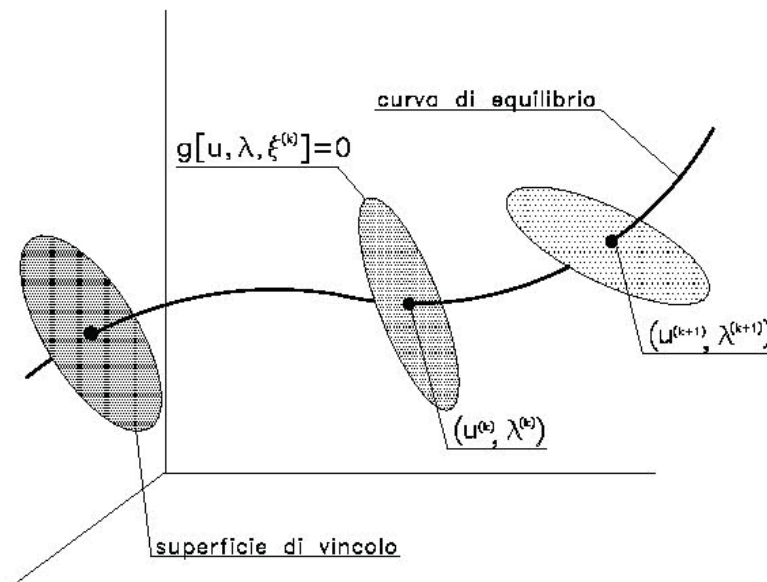


Figura 5-9: Significato geometrico della superficie di vincolo

secondo il metodo dell'arco di curva, si articola in due fasi distinte:

- predictor

Partendo dal punto noto $x_0 = x^{(k)}$, la prima stima x_0 può essere fornita o dalla tangente al percorso nell'ultimo punto di equilibrio, oppure da una estrapolazione basata sui punti calcolati in precedenza. Una semplice estrapolazione lineare fornisce ad esempio

$$x_1 = x_0 + \beta^{(k)}(x^{(k)} - x^{(k-1)}) \quad 5.28$$

essendo $\beta^{(k)}$ un fattore di amplificazione della lunghezza del passo. È possibile tuttavia utilizzare, con un certo extracosto computazionale, dei predictor più accurati. Questi si basano su estrapolazioni Lagrangiane di ordine superiore ovvero su sviluppi in serie di Taylor che utilizzano le derivate successive di $x(\xi)$ in $x = x_0$.

- corrector

Le prime n equazioni del sistema (5.27) sono risolte mediante il metodo iterativo di Newton-Raphson nel rispetto della condizione di vincolo (5.25), determinando una sequenza convergente $\mathbf{x}_j := (\mathbf{u}_j, \lambda_j), j = 2, 3 \dots$

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{K}}\dot{\mathbf{u}}_j - \lambda_j \hat{\mathbf{p}} = -\mathbf{x}_j \\ g(\mathbf{x}_j + \dot{\mathbf{x}}_j, \xi_k) = 0 \end{cases} \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_j \\ \lambda_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{u}_j \\ \lambda_{j+1} - \lambda_j \end{bmatrix} \quad 5.29$$

essendola matrice di rigidità.

$$\tilde{\mathbf{K}} := \left\{ \frac{d\mathbf{s}(\mathbf{u})}{d\mathbf{u}} \right\}_{\mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}}} \quad 5.30$$

Come già evidenziato, la decomposizione triangolare di quest'ultima rappresenta la parte più onerosa del processo: da questa considerazione scaturiscono le due strategie che ne prevedono l'aggiornamento a ciascun ciclo iterativo $\tilde{\mathbf{u}} := \mathbf{u}_j$ (schema Newton puro), ovvero la valutazione solo all'inizio del passo incrementale assumendo $\tilde{\mathbf{u}} := \mathbf{u}_0$ o $\tilde{\mathbf{u}} := \mathbf{u}_1$ (schema Newton modificato).

Il processo iterativo viene fermato quando una opportuna misura del residuo r risulta inferiore ad una tolleranza ε prefissata. Quindi ponendo $\mathbf{x}^{(k+1)} := \mathbf{x}_j$, dove $\|\mathbf{r}_j\| \leq \varepsilon$ si procede con il successivo passo incrementale.

5.3.1 Varianti del metodo dell'arco di curva

Il metodo della lunghezza d'arco, inizialmente formulato da Riks, è stato oggetto di numerosi studi negli anni successivi ed attualmente costituisce lo strumento standard per l'analisi nonlineare delle strutture. L'attenzione dei ricercatori si è sostanzialmente soffermata, oltre che sulla formulazione di varie superfici di vincolo, su tecniche di miglioramento del predictor e su altre applicazioni di metodi in grado di accelerare la convergenza delle iterazioni alla Newton nella fase di corrector.

Un gran numero di varianti si differenziano sostanzialmente per la forma della superficie (5.25). A tal proposito è importante osservare che superfici di vincolo definite da piani con orientazione costante, pur semplificando la formulazione degli algoritmi di soluzione del sistema delle (5.5, 5.25), possono fallire nel determinare la soluzione in corrispondenza di punti di gomito. Ad esempio il classico metodo ad incrementi di carico, che in pratica corrisponde alla $g[\mathbf{u}, \lambda, \xi] := \dot{\lambda}_j = 0$ non è in grado di superare punti limite per il carico.

Una famiglia di superfici di vincolo, che comprende la gran parte delle proposte formulate in letteratura, può essere posta nella forma

$$\bar{\mathbf{n}}^T \bar{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad 5.31$$

essendo $\bar{\mathbf{n}} = (n, v)$ una opportuna direzione e $\bar{\mathbf{M}} = \text{diag}(\mathbf{M}, \mu)$ una matrice, simmetrica e definita positiva, che definisce un prodotto scalare nello spazio (\mathbf{u}, λ) in modo da rendere omogenee variabili di differente natura. In particolare lo schema originariamente proposto da Riks prevedeva

$$\bar{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 \\ \lambda_1 - \lambda_0 \end{bmatrix} \quad 5.32$$

Il metodo, detto metodo di Riks, corrisponde ad una superficie costituita dall'iperpiano avente normale $\bar{\mathbf{n}}$ costante. In Figura 5-10 è schematicamente rappresentato l'andamento della convergenza nel caso del metodo di Riks e di

iterazioni secondo lo schema di Newton Raphson modificato. Impiegando un iperpiano ad orientazione costante, il metodo può fallire in corrispondenza di punti di gomito lungo la curva di equilibrio.

Tali inconvenienti sono superati dalla variante, detta metodo di Riks modificato e proposta da Ramm, che consiste nel porre

$$\bar{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_0 \\ \lambda_j - \lambda_0 \end{bmatrix} \quad 5.33$$

In tal modo il sub-incremento $\dot{\mathbf{x}}_j$ viene reso ortogonale al corrente incremento $\dot{\mathbf{x}}_j - \dot{\mathbf{x}}_0$, producendo lo schema iterativo rappresentato in Figura 5-10

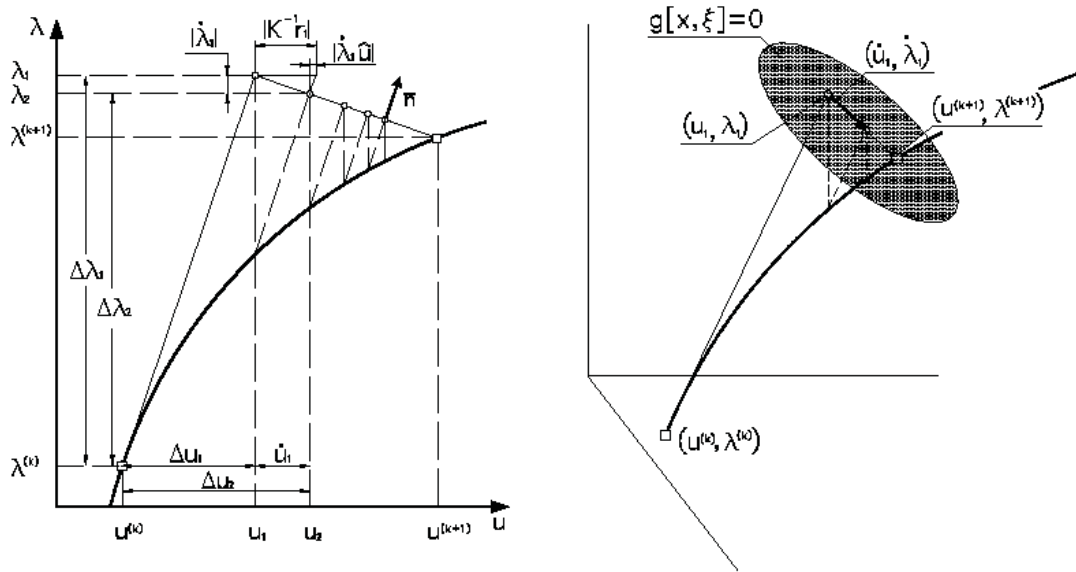


Figura 5-10: metodo di Riks con schema di Newton modificato

Nei casi appena illustrati, in cui il vincolo è lineare nella singola iterazione, lo schema iterativo (5.29) può essere posto nella seguente forma

$$\tilde{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{x}}_j = -\mathbf{R}_j \quad \dot{\mathbf{x}}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{u}_j \\ \lambda_{j+1} - \lambda_j \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_j \\ 0 \end{bmatrix} \quad 5.34$$

essendo $\tilde{\mathbf{J}}$ la matrice

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}} & -\hat{\mathbf{p}} \\ \mathbf{n}^T \mathbf{M} & \nu \mu \end{bmatrix} \quad 5.35$$

Il sistema (5.34) viene solitamente risolto in forma partizionata al fine di conservare i vantaggi della forma simmetrica e bandata della matrice di rigidezza. Per la soluzione del sistema (5.29) si ottiene così

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_j &= \frac{\mathbf{n}^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_j}{\nu \mu + \mathbf{n}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{u}}} \\ \dot{\mathbf{u}}_j &= \tilde{\mathbf{K}}^{-1} [\dot{\lambda}_j \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{r}_j] = \dot{\lambda}_j \hat{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_j \end{aligned} \quad 5.36$$

Poiché la matrice $\tilde{\mathbf{K}}$ è simmetrica e bandata, la soluzione attraverso le (5.36) è particolarmente conveniente da un punto di vista computazionale: il peggioramento della convergenza dovuto agli errori di arrotondamento è insignificante se si tiene

conto dell'aggravio computazionale che comporta un algoritmo di Gauss standard per matrici generiche e con meccanismo di pivot sulle righe.

Benché il metodo di Riks modificato rappresenti in pratica un buon compromesso tra robustezza ed efficienza computazionale, sono state proposte altre, più complesse, superfici di vincolo. Ad esempio una superficie non rientrante nella famiglia delle (5.31) è quella, nonlineare, proposta da Crisfield che assume la forma

$$(\Delta x_j + \dot{x}_j)^T \bar{M} (\Delta x_j + \dot{x}_j) - \xi^{(k)2} = 0 \quad 5.37$$

dove $\Delta x_j = (\Delta u_j, \Delta \lambda_j) = x_j - x^k$. La superficie corrispondente, che definisce il cosiddetto spherical arc-length method, è una ipersfera nello spazio R^{n+1} (Figura 5-11), e la soluzione in forma partizionata della (5.29) fornisce

$$\dot{u}_j = \tilde{K}^{-1} [\dot{\lambda}_j \hat{p} - r_j] \quad 5.38$$

$$a \dot{\lambda}_j^2 + b \dot{\lambda}_j + c = 0 \quad 5.39$$

dove i coefficienti dell'equazione di secondo grado (5.39) sono dati dalle seguenti relazioni

$$a = \mu + \hat{u}_j^T M \hat{u}_j \quad 5.40$$

$$b = 2(q_j^T M \hat{u}_j + \mu \Delta \lambda_j) \quad 5.41$$

$$c = q_j^T M \hat{q}_j + \mu \Delta \lambda_j^2 - \xi^{(k)2} \quad 5.42$$

Essendo

$$q_j = \Delta u_j - K_j^{-1} r_j \quad \hat{u}_j = K_j^{-1} \hat{p}$$

La proposta originale di Crisfield prevedeva in realtà $\bar{M} = \text{diag}(I, 0)$ definiva una superficie sferica nel solo spazio degli spostamenti (in letteratura tale metodo viene spesso indicato come cylindrical arc-length method).

La principale complicazione introdotta dal metodo di Crisfield consiste nella necessità di un criterio per la scelta tra le due radici, $\dot{\lambda}_1$ e $\dot{\lambda}_2$, della (5.39). Si osservi che, tuttavia, qualche problema può aversi in presenza di biforcazioni, ovvero quando la direzione critica è diversa dalla tangente al percorso nel punto critico. In particolare, in assenza di specifiche cautele, il punto di biforcazione viene superato e lo schema di soluzione procede lungo il percorso fondamentale della struttura. Diverse tecniche numeriche sono state proposte per eliminare tale inconveniente consentendo di proseguire nella ricostruzione del percorso diramato (tecniche di branch switching) in caso di biforcazione semplice. La soluzione a tale problema diventa però complicata in presenza di biforcazioni multiple.

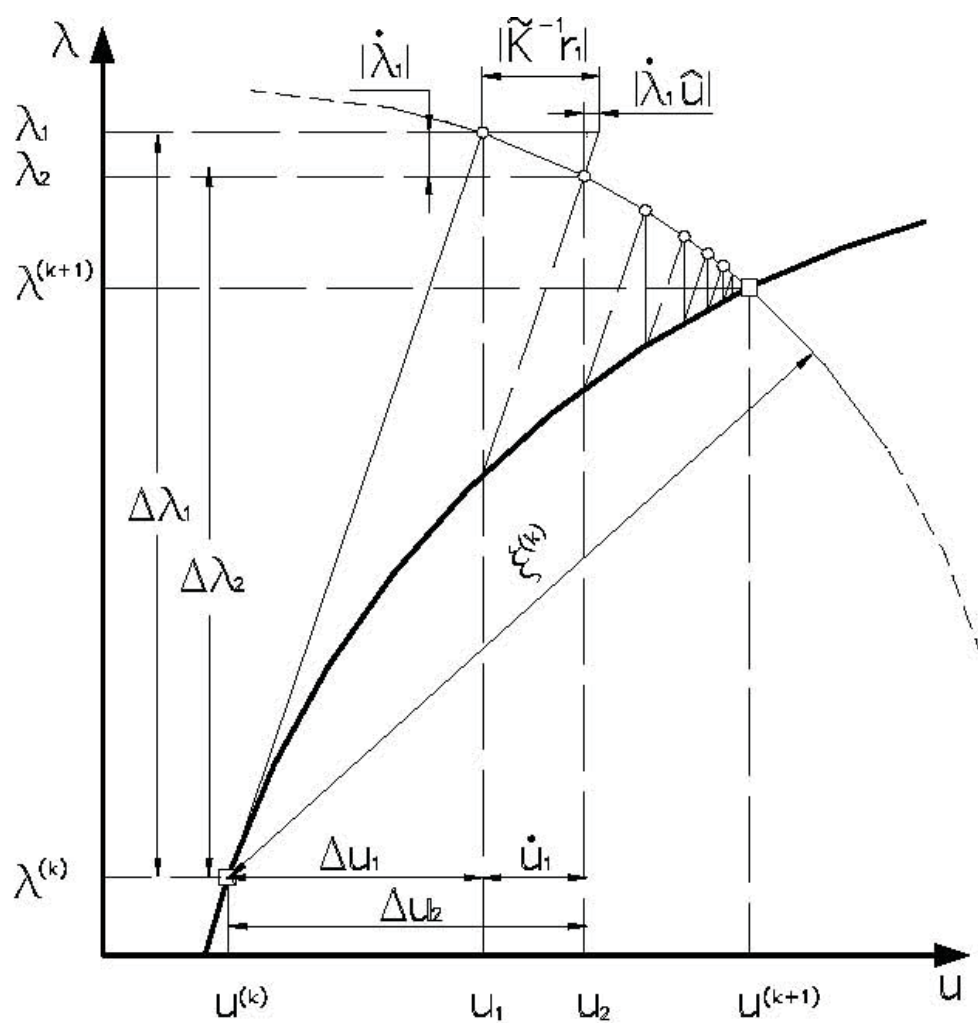


Figura 5-11: Metodo di Crisfield con schema iterativo di Newton modificato

6 Evidenze numeriche

6.1 Struttura modellata con beam

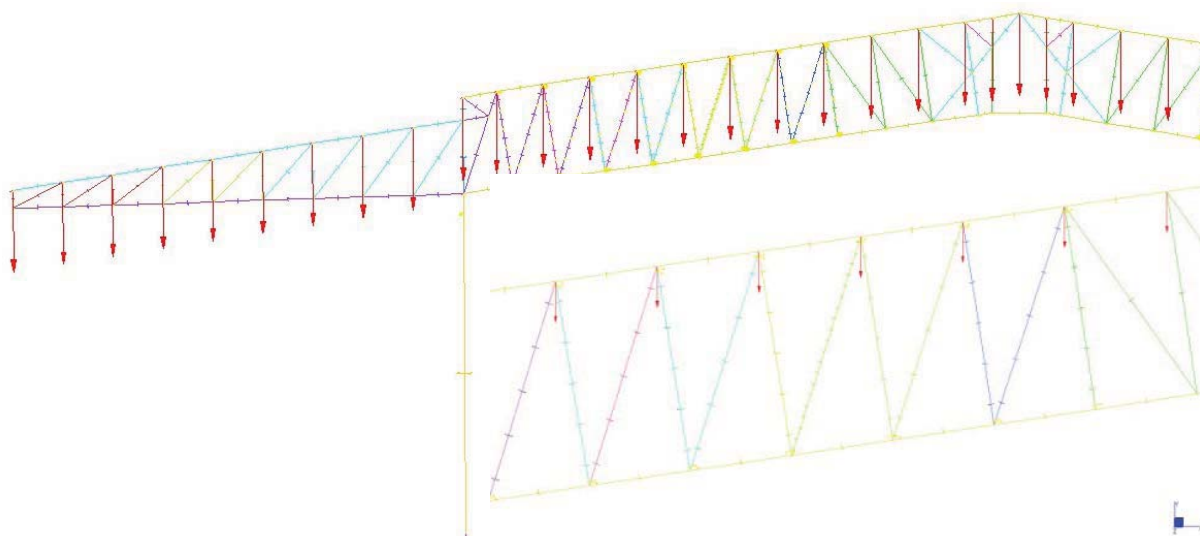


Figura 6-1: reticolare modellata a beam e relativo ingrandimento dell'asta soggetta a instabilità

Come primo semplice riscontro numerico si rappresenta la struttura con beam. Per essere il più fedeli possibili con il modello alla realtà si sono ruotate le sezioni dei beam in modo da avere la giusta direzione per gli assi principali d'inerzia. Dato inoltre che lo sbandamento esce dal piano si vincola la struttura impedendo gli spostamenti lungo z solo sui nodi nel corrente superiore ed inferiore. Dopodiché si son scelti tre modi per rappresentare il vincolo dei diagonal della struttura:

- 1 il primo consiste nel lasciare il nodo così come viene creato da Straus, cioè simulando l'incastro ($\beta = 0.5$)

$$P_{crit,nodale} \cong 3615 \text{ N} \quad 6.1$$

- 2 il secondo usa gli *End Release* di Straus per svincolare le rotazioni della sezione UNP 40x40x5 rispetto ai due assi di inerzia z e y (vedi Figura 6-2) solo in corrispondenza del corrente superiore. In questo caso si è simulata il caso di normativa con $\beta = 0.8$ che attraverso Straus offre

- 3

$$P_{crit,nodale} \cong 1671.43 \text{ N} \quad 6.2$$

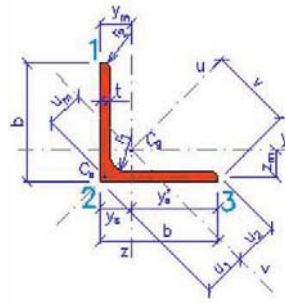


Figura 6-2: sezione

- 4 nel terzo modo si svincolano, sempre come prima con gli *End Release*, le rotazioni della sezione ad entrambe le estremità, in corrispondenza del corrente superiore ed inferiore, così da ricreare la condizione $\beta = 1$. In questo ultimo caso Straus elabora

$$P_{crit,nodale} \cong 1007.98 \text{ N}$$

6.3

6.2 Benchmark di riferimento

Per meglio capire da cosa è maggiormente influenzato il sistema preso in considerazione si prende come riferimento il singolo profilo L 40x40x5 di lunghezza ideale 2350 mm.

6.2.1 Beam

Si comincia con l'asta beam incernierata in modo da lasciar libere le rotazioni attorno ad x e z (Figura 6-2)

$$P_E = 8.283 \text{ KN}$$

6.4

Se consideriamo, sempre con conti semplificati, la lunghezza dell'asta a beam (senza quindi tener conto delle reali fattezze di quest'ultima) decurtata delle saldature ($60 \times 2 = 120 \text{ mm}$) e calcolando nuovamente il carico critico:

$$P_E = 9.199 \text{ E KN}$$

6.5

Vediamo che i valori discostano uno dall'altro per un 11%. Sarà interessante confrontare questo valore con le analisi successive svolte vincolando la medesima asta costituita da plate.

6.2.2 Plate

Ora quindi consideriamo l'asta formata da shell e per cominciare la vincoliamo solo ad un nodo come in Figura 6-3. Si procede quindi con un'analisi statica non lineare per geometria e materiale fino a trovare il valore massimo del carico ammissibile prima del collasso della struttura.

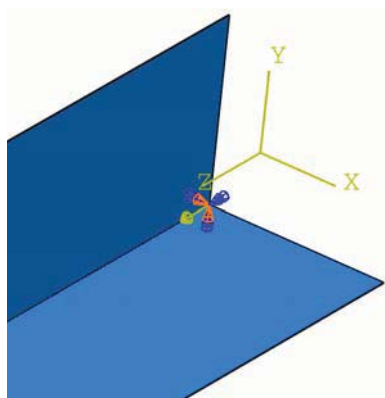


Figura 6-3: particolare: asta vincolata solo ad un nodo

- ponendo $dx = dy = dz = rz = 0$ otteniamo $P_E = 7.251 \text{ KN}$
- vincolando $dx = dy = dz = rx = ry = rz = 0$ otteniamo $P_E = 14.061 \text{ KN}$

ma queste situazioni son ben lontane dal rappresentare la reale presenza della saldatura nella reticolare che si sta studiando. Si suddivide allora l'asta in modo da creare una zona alle estremità tale da poter esser adeguatamente costretta tramite opportuni vincoli (Figura 6-4).

Di seguito il Grafico 6-1 riassuntivo dei carichi trovati aumentando progressivamente la zona adibita a saldatura vincolata impedendo tutte le traslazioni lungo solo i lati di tale rettangolo. Come ascissa della sopracitata tabella si è scelto di mettere il beta ricavato a ritroso con la formula Euleriana, questo per poter avere un metodo di confronto con il caso bidimensionale del beam.

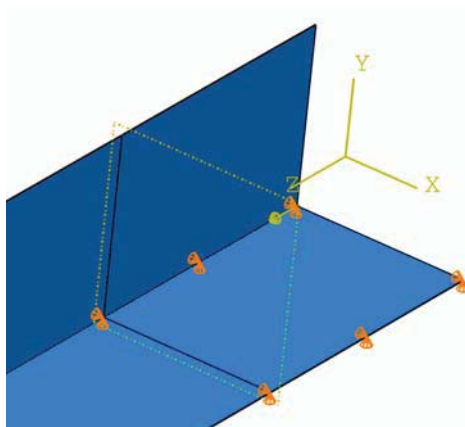


Figura 6-4: Particolare asta simulazione saldatura

Si nota come anche con piccoli valori della saldatura il carico di picco cala sensibilmente, a dispetto di quanto si potrebbe supporre basandosi dalla semplice osservazione con elementi beam e l'analisi euleriana classica.

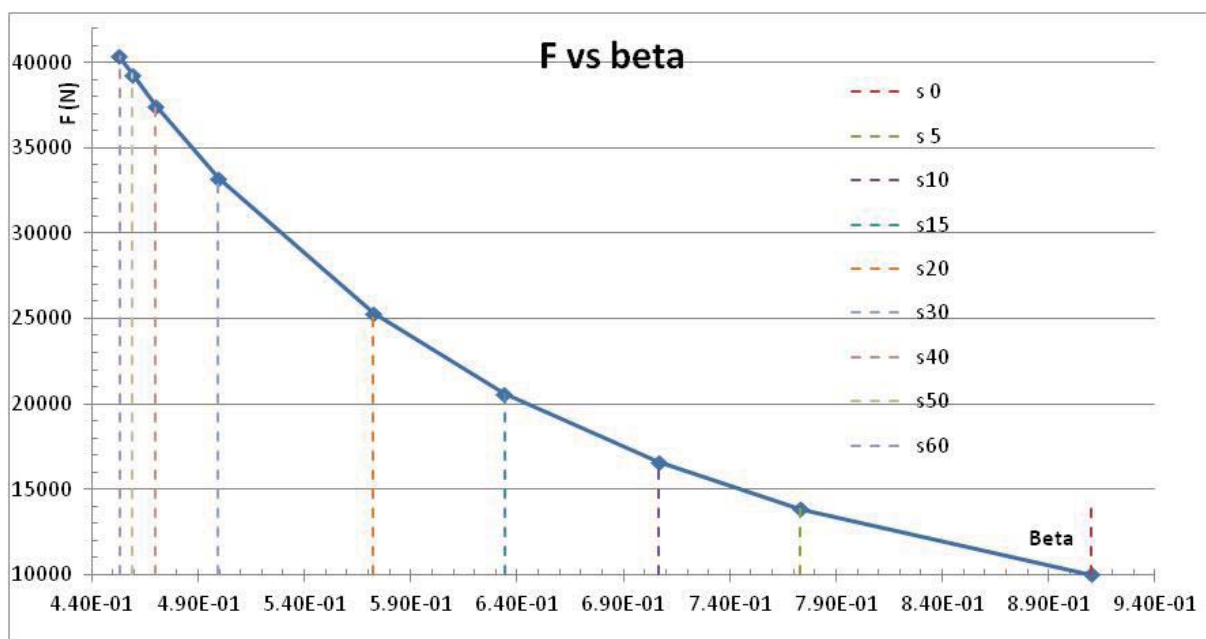


Grafico 6-1: Andamento Forza nodale vs Beta equivalente

Ciò è dovuto alla presenza dell'ala libera dalla saldatura (giacente sul piano zy) che diviene, assieme al vincolo dato dalla saldatura, un impedimento all'instabilizzazione

6.3 Modellazione mista plate-beam

Passando ad un gado di analisi più accurato si procede ora con una modellazione mista a beam e a plate. Volendo avere un maggiore dettaglio e una migliore corrispondenza con la realtà si modella con shell la parte di reticolare vicina all'asta più snella (UNP 40x40x5) e la restante reticolare rimane modellata con elementi monodimensionali. Per permettere che il solutore crei continuità di spostamenti (e di conseguenza possa calcolare tensioni e quant'altro) tra beam e shell si è utilizzato il *coupling constraint*:

- accoppia il moto di un gruppo di nodi di una superficie al moto di un nodo di riferimento
- è di tipo cinematico quando il gruppo di nodi è accoppiato al moto rigido definito dal nodo di riferimento
- è di tipo distribuito quando il gruppo di nodi può essere vincolato al moto rigido del corpo definito dal nodo di riferimento in media permettendo il controllo oltre il passaggio di forze attraverso i pesi specificati nei *coupling nodes*
- seleziona automaticamente i *coupling nodes* situati su una superficie che giace all'interno di una regione di influenza
- può essere usato con elementi bi o tri dimensionali negli sforzi/deformazioni
- può essere usato in analisi lineari o non lineari per geometria.

Inoltre si considera solo metà della capriata, per alleggerire l'analisi, imponendo in mezzzeria vincoli di simmetria $dx = \varphi y = \varphi z = 0$. La modellazione delle saldature si è simulata imponendo nella zona di sovrapposizione (corrente/diagonale corrente/verticale) uno spessore maggiore e allineando poi convenientemente tali spessori.

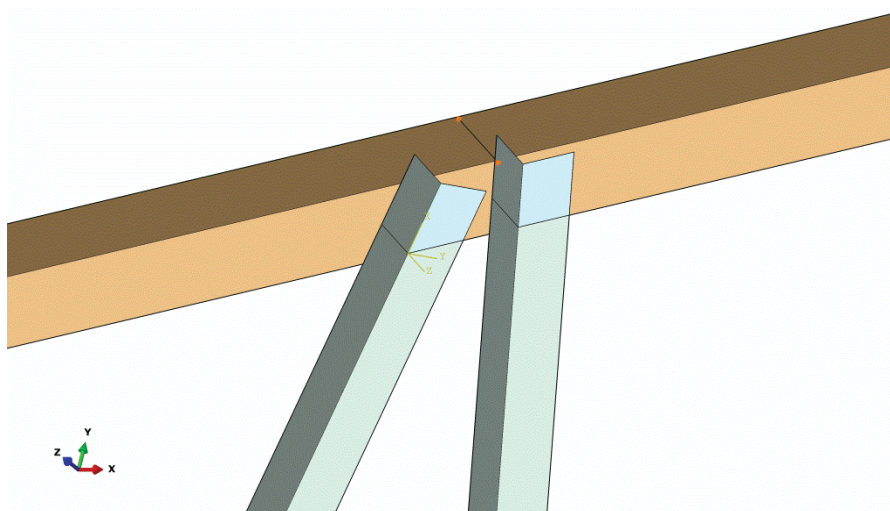


Figura 6-5: Particolare saldatura

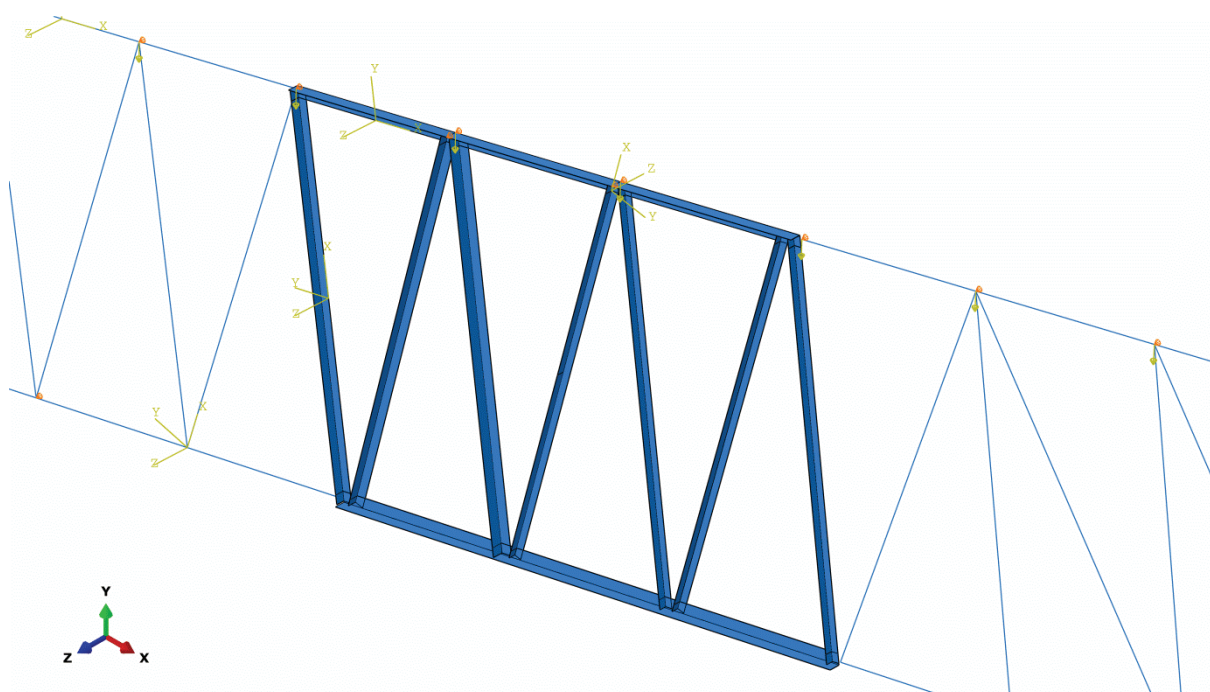


Figura 6-6: reticolare mista, visione globale

Per semplicità e per non appesantire troppo il modello i carichi provenienti dagli arcarecci sono stati concentrati nella mezzeria della proiezione sul corrente superiore dei baricentri del diagonale e del verticale.

Si comincia con una semplice analisi di buckling con carico nodale sul corrente superiore di 1KN che fornisce il seguente moltiplicatore di carico

$$\lambda = 3.3594$$

6.6

che si avvicina al valore di incastro fornito da 6.1.

Ma da quanto trovato precedentemente e da quanto letto negli articoli, sottoponiamo la struttura anche ad un'analisi non lineare sia per geometria che per materiale (andamento del diagramma σ vs ε in Grafico 6-2). Le non linearità,

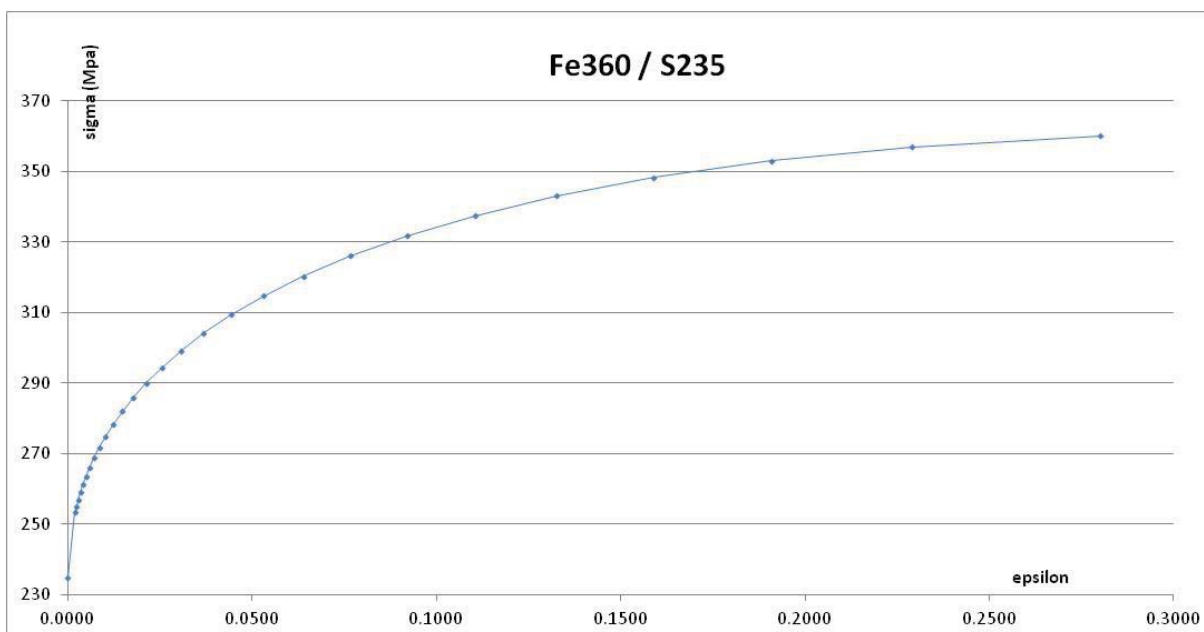


Grafico 6-2: Andamento sigma ed epsilon per l'acciaio preso in considerazione. Si assume un andamento elasto-plastico quasi perfetto.

considerate separatamente, non presentano punti di massimo, ma è la loro combinazione a fornire l'instabilità.

si usa direttamente un'analisi mista, con due step:

- il primo è una normale analisi statica non lineare per geometria e per materiale, che consente di avere un sufficiente numero di valori in campo pre-critico per successive considerazioni
- il secondo step invece usa l'algoritmo dell'arco di curva di Riks (5.3) che consente di valutare il carico superato il quale l'asta perde la maggior parte della sua capacità portante.

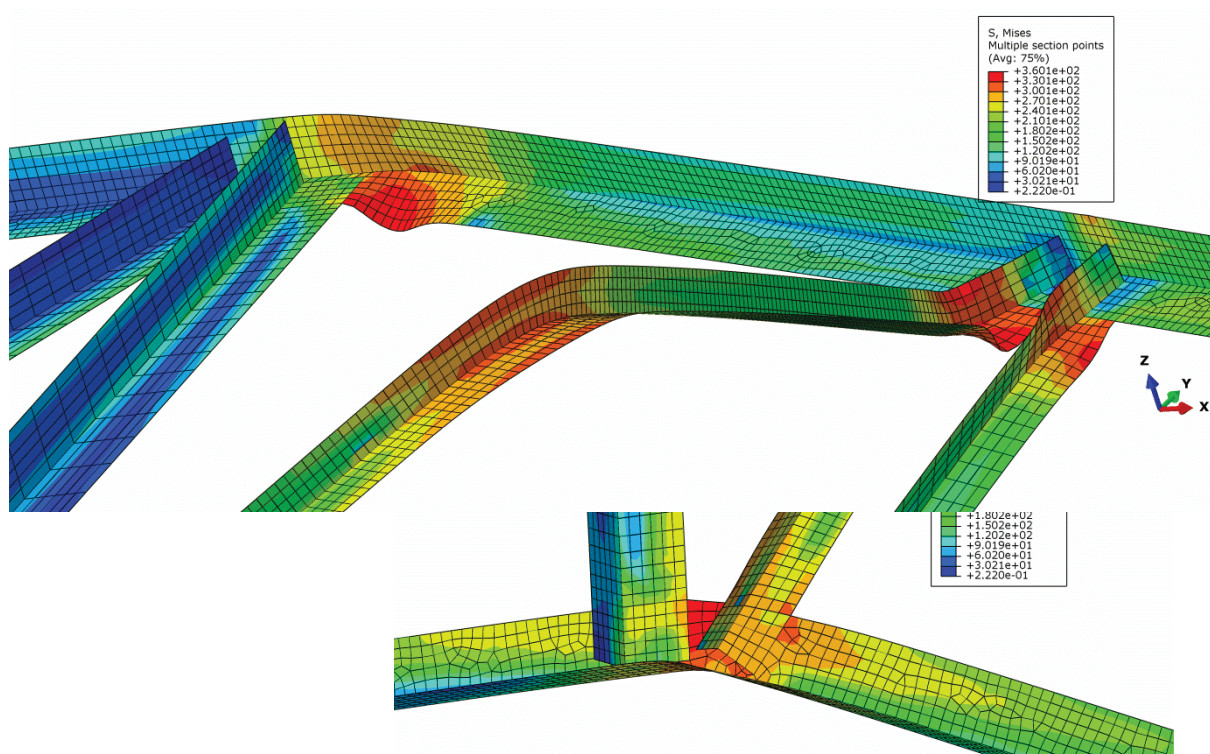


Figura 6-7: Particolare della formazione di cerniere plastiche nella parte superiore, centrale e

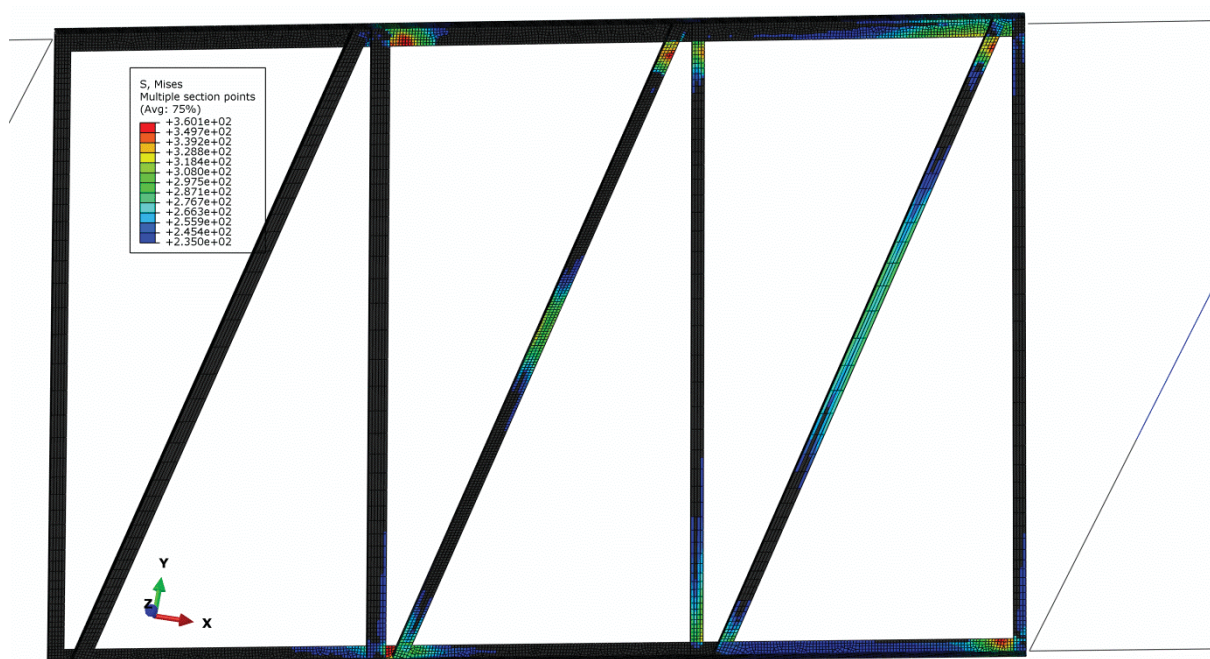


Figura 6-8: in evidenza le zone della struttura reticolare che superano il limite di snervamento del materiale ($f_y = 235 \text{ MPa}$)

Dopo queste prime analisi di sondaggio ($P_u = 2.845 \text{ KN}$) si procede ora prendendo in considerazione vari possibili imperfezioni strutturali o di materiale.

6.3.1 Analisi con f_y decrescente

Si comincia forzando la plasticizzazione delle tre zone (Figura 6-7 e Figura 6-8) in cui si formano naturalmente delle cerniere plastiche per perdita di rigidità dell'asta. Per far ciò si diminuisce sempre più il limite di snervamento dell'acciaio.

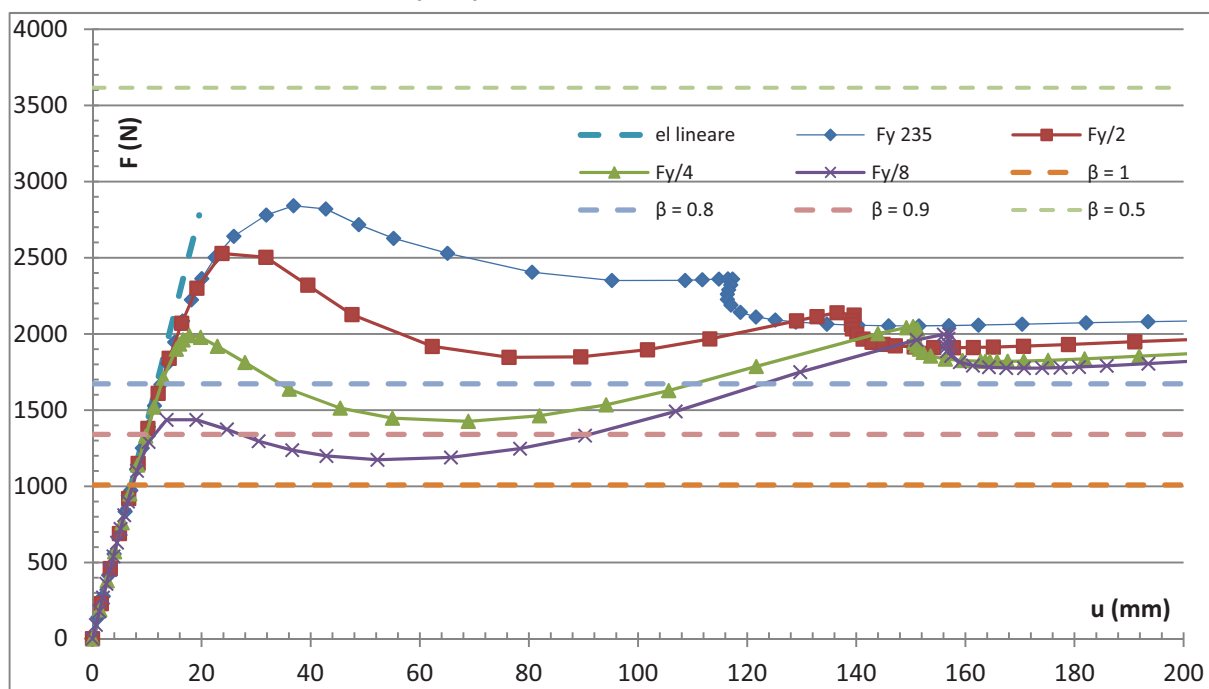


Grafico 6-3: grafico F vs spostamento con f_y via via decrescente

Dal Grafico 6-3, come poi si vedrà anche in seguito, notiamo che tutte le curve, dopo un primo picco in corrispondenza del carico ultimo per il diagonale 40x40x5 ne presentano un secondo in corrispondenza del carico che crea instabilità per un secondo diagonale (a destra di quello centrale in Figura 6-8).

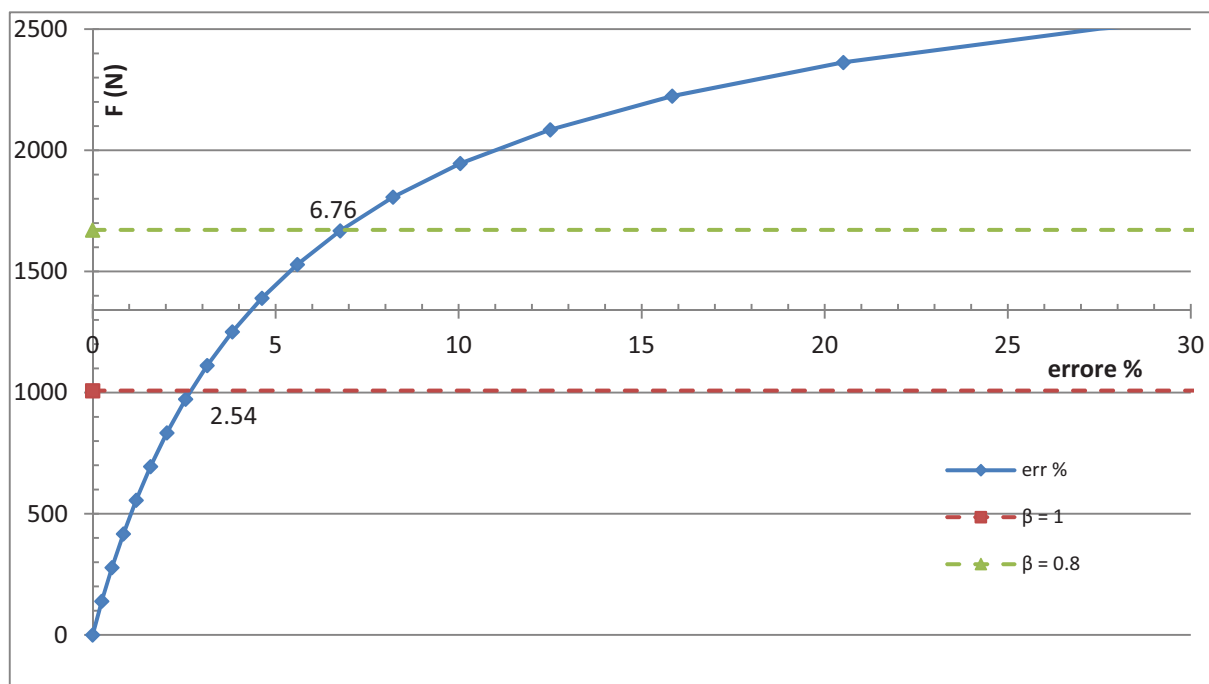


Grafico 6-4: Errore della soluzione rispetto all'analisi elastica lineare per $f_y = 235 \text{ MPa}$

Si evidenzia che la struttura, pur perdendo la capacità portante iniziale, mantiene una sua ulteriore resistenza data dallo stato precritico che mantengono i restanti elementi che la compongono. Vengono posti come riferimento i valori di buckling ottenuti con il modello a beam per alcuni valori di β significativi.

Sempre osservando il Grafico 6-3 si osserva che dopo un primo momento le curve si discostano dall'andamento lineare e nel Grafico 6-4 si indaga su ciò. Si nota che si passa da un errore di circa il 2,54% per un $\beta = 1$ e del 6,76% per $\beta = 0.8$ (corrispondente ad una cerniere superiore e ad un incastro in corrispondenza del corrente inferiore).

6.3.2 Analisi con imperfezioni geometriche

Un secondo tipo di indagine viene svolto sulle imperfezioni geometriche che possono interessare la struttura reticolare, in particolare le eccentricità che inevitabilmente rendono le aste non perfettamente rettilinee. Di norma questa eccentricità è dell'ordine dell'1% della lunghezza dell'asta, nel nostro caso quindi $\cong 23 \text{ mm}$. Per far ciò si è costruita una nuova sezione estrusa con uno spostamento in mezzzeria lungo il piano passante per y e bisettrice di $x0z$. Dal Grafico 6-5 si vede un andamento simile a quello del Grafico 6-3 ma con la differenza che anziché delinearci un secondo picco di instabilità all'aumentare dello spostamento, tutte le soluzioni convergono verso un flesso orizzontale. Anche in questo caso si valuta l'errore tra la soluzione lineare perfettamente elastica e quella fornita dalle varie eccentricità. I risultati sono riassunti nel Grafico 6-6. Si nota che per l'eccentricità vicina a quella suggerita dalla normativa (1% della lunghezza dell'asta), l'errore rispetto al caso elastico lineare è già del 50% circa con forze nodali pari a 220 N.

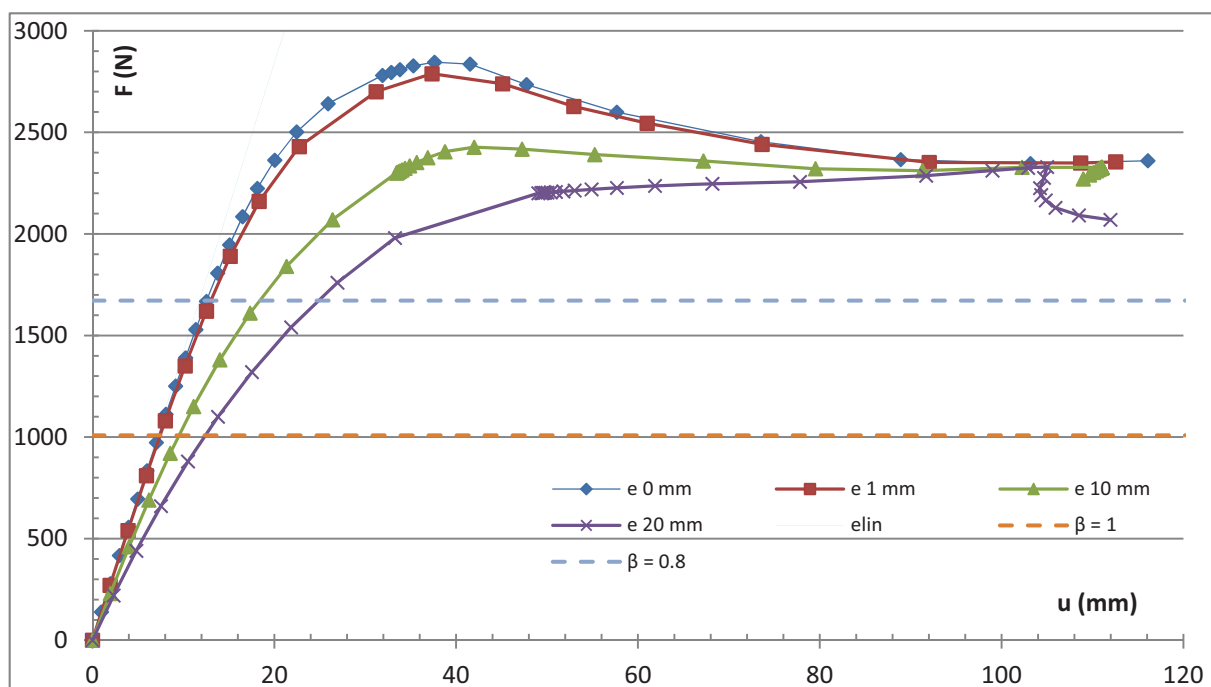


Grafico 6-5: Variazione della curva di instabilità al variare dell'eccentricità

C'è inoltre da osservare che al crescere dell'eccentricità la curva Forza spostamento non denota più un picco ben marcato ma tale massimo va via via sempre più appiattendosi fino a diventare non più identificabile.

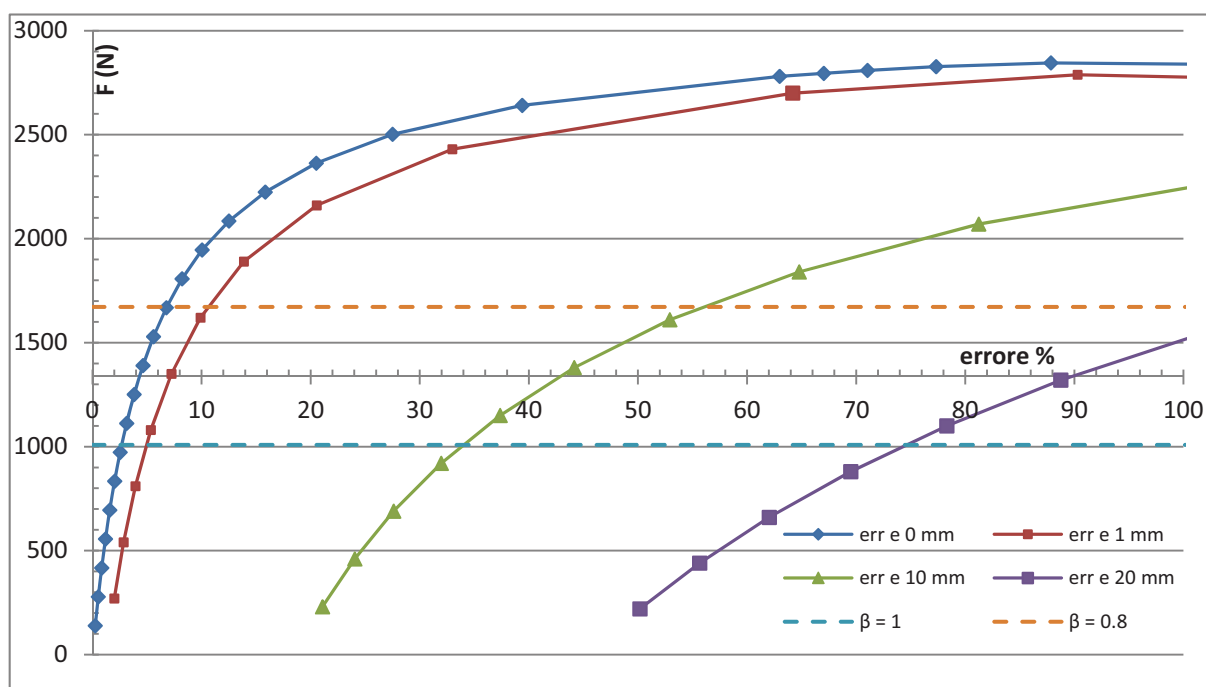


Grafico 6-6: Errore in funzione dell'eccentricità

6.3.3 Analisi con variazione di ala saldata

Come ultima analisi, riprendendo e valorizzando gli esempi fatti con la singola asta beam (§6.2.1) e quella a plate (§6.2.2), si considera il diagonale della reticolare. Di questo si prendono in considerazione i conchi saldati e in particolare le ali libere dal vincolo di saldatura (Figura 6-9)

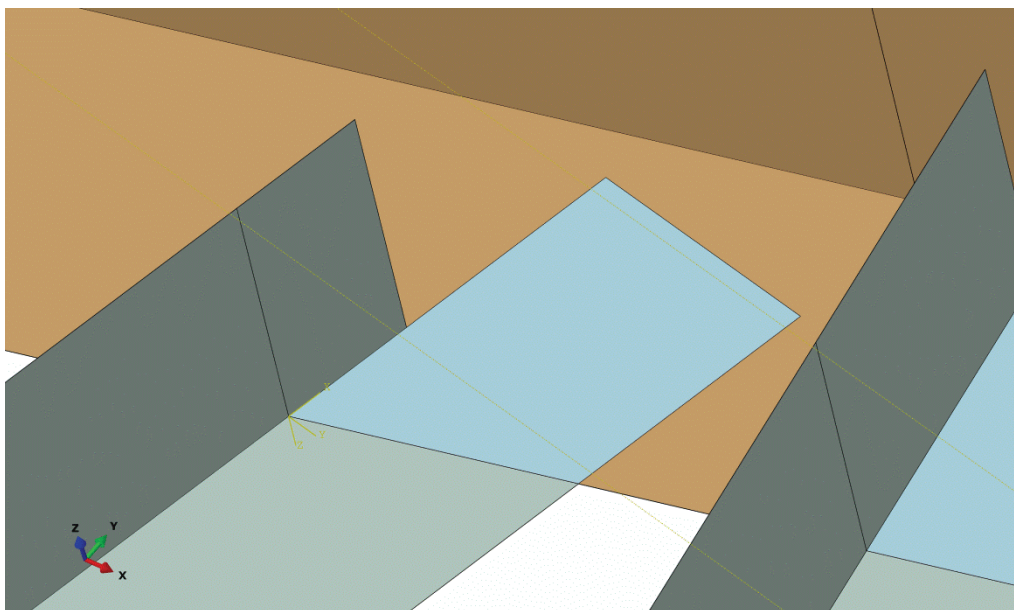


Figura 6-9: Particolare della saldatura decurtata

Nel GGRAFICO si mostra come al diminuire dell'ala libera saldata i picchi delle curve vadano via via diminuendo fino al valore limite, incui non vi è presenza di ala, per il quale la Forza nodale di picco risulta inferiore a quella della struttura in condizioni "normali" del 24,5%

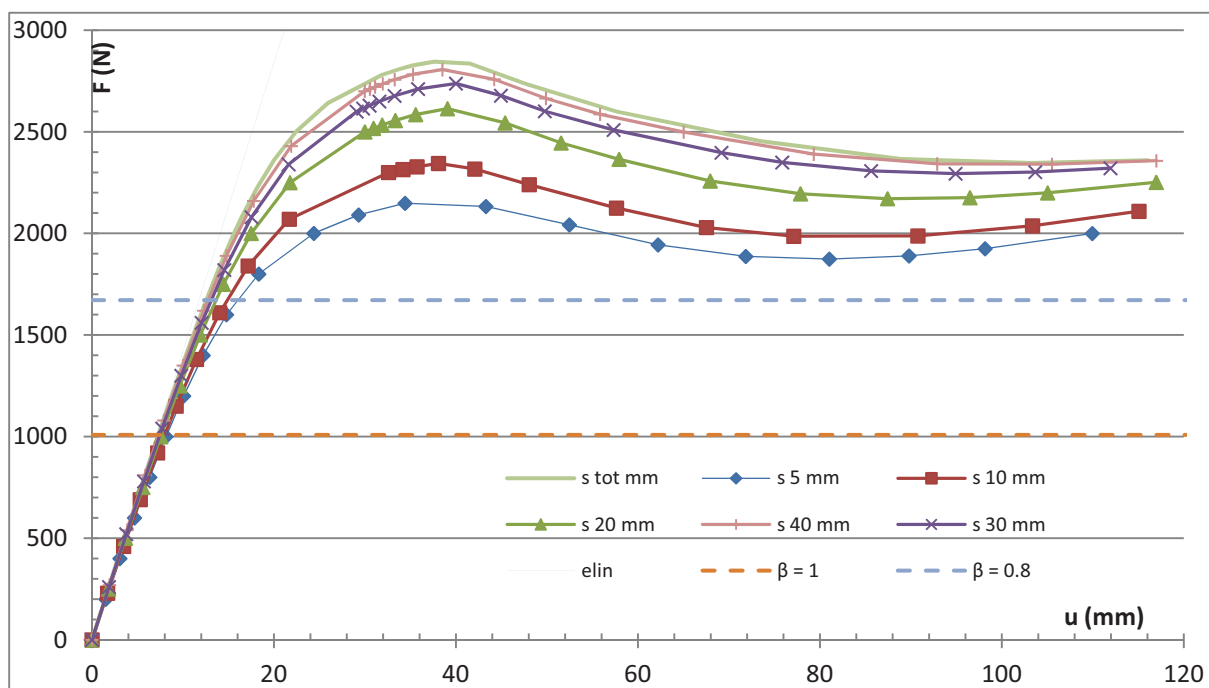


Figura 6-10: Andamento F vs u per lunghezza ale libere minori

Conclusioni

Da tutte le analisi fatte finora emerge una non semplice questione per quanto riguarda la collocazione esatta di un valore per il carico di collasso per la struttura. Se è ben chiaro che quest'ultima non raggiunge la tensione di snervamento se non per spostamenti molto elevati, rimane la difficoltà di intercettare con precisione nelle curve proposte "F vs spostamento" un punto che faccia da spartiacque per la configurazione in equilibrio e quella di instabilità.

Questo è da attribuirsi al fatto, come suggerito dal Capitolo 2 e dai diversi articoli posti in bibliografia (che nella maggior parte dei casi studiano profili simmetrici o piastre d'anima di travi), che la struttura ha una maggiore resistenza all'instabilità classica ed è molto sensibile alla configurazione geometrica degli elementi. Infatti nel calcolo per il carico critico euleriano per le strutture reticolari si considerano le aste semplicemente incernierate (mentre abbiamo dimostrato che la lunghezza di saldatura in profili aperti genera notevoli variazioni al P_{cr}) e si tiene conto solamente del momento d'inerzia minimo della sezione. In questo esempio invece si è fatto notare che l'instabilità è facilmente influenzabile, non tanto per variazioni su f_y e f_u , ma bensì da variazioni sulla configurazione geometrica, come la presenza più o meno marcata di eccentricità e l'ala del profilo angolare che supporta la saldatura e ne conferisce rigidità.

Non si può quindi prendere posizione e determinare un preciso rapporto tra carico critico euleriano e carico ultimo poichè ogni singolo caso dovrebbe esser valutato singolarmente e separato nelle sue componenti geometriche più peculiari.

Bibliografia

- A. Suleman - R. Sedaghati - Benchmark case studies in optimization of geometrically nonlinear structures - *Struct Multidisc Optim* (2005) 30: 273–296
- E. Riks Buckling Analysis of Elastic Structures: a Computational Approach, vol. 34, Academic Press, New York, 1998, pp. 1–76
- Luis A. Godoy a, Edgardo O. Taroco - Design sensitivity of post-buckling states including material constraints - *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 188 (2000) 665±679
- M. Ohsaki - Design sensitivity analysis and optimization for nonlinear buckling of finite-dimensional elastic conservative structures - *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 194 (2005) 3331–3358
- Mehdi Jalalpour, Takeru Igusa, James K. Guest - Optimal design of trusses with geometric imperfections: Accounting for global instability - *International Journal of Solids and Structures* 48 (2011) 3011–3019
- Michele Mele - Sul dimensionamento delle nervature di irrigidimento d'anima nelle travi in acciaio parte I – parte II
- Riccardo Baldacci - Gian Mario BO – P. Marco Capurro – Ivo Daddi - Metodi approssimati per la ottimizzazione degli irrigidimenti d'anima
- Ricks E (1979) An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *Int J Solids Struct* 15:529–551
- Sun Huanchun, Wang Yuefang *, Zhao Wei - Comparison of theories for stability of truss structures. Part 1: Computation of critical load - *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 14 (2009) 1700–1710